N. RYBKIN

ZBIÓR ZADAŃ GEOMETRYCZNYCH RACHUNKOWYCH

CZĘŚĆ I. — PLANIMETRJA

OPRACOWAŁ I UZUPEŁNIŁ

ALFRED DOMINIKIEWICZ

WYDANIE JEDENASTE

PRZEJRZANE I POPRAWIONE

1 9 3 1

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE

N. RYBKIN

ZBIÓR ZADAŃ GEOMETRYCZNYCH RACHUNKOWYCH

CZĘŚĆ I. — PLANIMETRJA

OPRACOWAŁ I UZUPEŁNIŁ
ALFRED DOMINIKIEWICZ

WYDANIE JEDENASTE
PRZEJRZANE I POPRAWIONE

1931
WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE

Drukarnia
Zakładów
Wydawniczych
M. Arct, S. A.
w Warszawie.

PRZEDMOWA.

Wydanie obecne nie różni się zasadniczo od wydań poprzednich ani swoim układem, ani rodzajem i treścią zadań.

Zmiany dokonane są przeważnie natury zewnętrznej. Usunięto przypadkowe błędy i usterki różnego rodzaju, poprawiono lub zmieniono redakcję niewielu zadań, usunięto zupełnie lub zastąpiono innemi niektóre, nieliczne zresztą, zbyt trudne zadania (zwłaszcza w cz. II-ej Zbioru).

Czynić większych zmian w materjale podręcznika nie było potrzeby, gdyż leży on całkowicie w ramach programu gimnazjum matematyczno-przyrodniczego. Dokonywanie odpowiedniego wyboru i koniecznych opuszczeń, jeżeli chodzi o inne wydziały szkoły ogólnokształcącej albo różne typy szkół zawodowych, nie może stanowić dla wykładającego żadnej trudności ze względu na przejrzystość redakcji zadań oraz dzięki wskazówkom przy rozwiązaniach trudniejszych zadań, zamieszczonych w dziale odpowiedzi.

Przy sposobności pragnę ponownie zwrócić uwagę kół zainteresowanych na pierwiastek dyskusyjny, występujący we wszystkich prawie działach zadań obu części Zbioru. Został skierowany wysiłek na to, ażeby dobór, następstwo i redakcja zadań sprowadzały dyskusję do geometrycznej strony zagadnień, czyniąc z rachunku nie cel, lecz narzędzie.

W trojaki sposób usiłujemy tutaj zaszczepić w uczniu nałóg do dyskutowania zagadnień: przez systematyczne rozwiązywanie całych grup powiązanych z sobą i w ścisłej kolejności podanych zadań liczbowych, przez rozwiązywanie zadań, posiadających więcej niż jedno rozwiązanie, i wreszcie przez dyskutowanie funkcyj, otrzy-

manych z rozwiązania zadań literowych. I to ostatnie stanowi wdzięczny teren, na którym najpierw mamy możność pokazania uczniowi dyskusji jako pożytecznego i potężnego narzędzia badania. Z tego też względu zamieszczone w obu częściach tego Zbioru zadania, prowadzące do dyskutowania funkcyj, odbiegają od zwykłego szablonu zadań „dyskusyjnych", tworzonych dla celów dyskusji.

A. D.

Kielce, w lutym 1931.

ZADANIA PLANIMETRYCZNE

Linja prosta.

1. Na odcinku AB, równającym się 20 dm, odmierzono część $AC = 5$ dm i część $BD = 7$ dm. Odnaleźć długość odcinka CD.

2. Rozwiązać zadanie № 1, zmieniając dane, jak następuje: $AB = 48$ cm, $AC = 28$ cm, $BD = 30$ cm.

3. 1) Na prostej dane są punkty A i B, których odległość wzajemna wynosi 50 cm; na tej samej prostej znajdują się jeszcze punkty C i D, przyczem $AC = BD = 10$ cm. Ilu cm może być równa odległość pomiędzy punktami C i D?

2) W tem samem zadaniu zmienić wartości odległości AC i BD na następujące: $AC = 20$ cm, $BD = 30$ cm.

4. 1) Na odcinku AB nieograniczonej prostej odmierzono część $AC = 9$ jedn., a od punktu C odmierzono jeszcze w kierunku B odcinek CD, o 21 jedn. dłuższy od AB. Wyznaczyć odległość BD.

2) Na prostej są dane punkty A i B. Od A w kierunku przeciwnym punktowi B odmierzamy część $AC = 9$ jedn., a od C w kierunku B—odcinek CD, o 21 jedn. dłuższy od AB. Wyznaczyć odległość BD.

5. 1) Odcinek AB podzielono na dwie części nierówne. Odległość pomiędzy środkami tych części równa się 2 m 12 cm. Znaleźć długość AB.

2) Odcinek $AB = 8$ cm podzielić na dwie jakiekolwiek części i obliczyć odległość pomiędzy środkami tych części.

6. Na odcinku AB wzięto odcinek $AC = {}^{14}/_{17}\, AB$; na AC odmierzono część $CD = 2^1/_2\, CB$; odcinek $AD = 26$ cm. Znaleźć długość AB.

7. Jaka jest odległość pomiędzy środkiem prostej $AB = 2$ dm 1 cm i punktem, który ją dzieli w stosunku $5:2$?

8. Odcinek AB przedłużono o długość BC taką, że AC jest m razy dłuższa od AB. Wyznaczyć stosunek $AB:BC$.

9. Odcinek AB podzielono na trzy części w stosunku 2:3:4. Odległość pomiędzy środkami części skrajnych równa się 48 cm. Znaleźć długość AB.

10. Punkt C dzieli odcinek AB w stosunku $5:7$[1], a punkt D w stosunku $5:11$. Odległość pomiędzy C i D równa się 10 cm. Wyznaczyć odległość AB.

11. Przyjmując niżej wskazane odległości pomiędzy punktami A, B i C, sprawdzić, czy punkty te znajdują się na jednej prostej:

1) $AB = 20$ cm, $AC = 13$ cm, $BC = 7$ cm.
2) $AB = 28$ jedn., $AC = 49$ jedn., $BC = 21$ jedn.
3) $AB = 23$ dm, $AC = 5$ m, $BC = 7$ m.

12. Na płaszczyźnie rozrzucono n punktów takich, że żadne trzy z pomiędzy nich nie leżą na jednej prostej. Ile różnych prostych otrzymamy, łącząc dane punkty po dwa? ($n = 5$; 6; 20).

13. Wyznaczyć największą[2] liczbę punktów przecięcia n linij prostych.

Kąty.

14. 1) Wewnątrz kąta rozwartego wyprowadzono z jego wierzchołka prostopadłe do ramion tego kąta; kąt pomiędzy temi prostopadłemi wynosi $^4/_7 d$. Wyznaczyć wielkość kąta rozwartego.

2) Kąt dany $= {}^2/_3 d$; z wierzchołka tego kąta wyprowadzono dwie proste prostopadłe do jego ramion. Wyznaczyć kąty pomiędzy temi prostopadłemi.

15. Dane są dwa kąty sąsiednie: ostry i rozwarty. Prosta, przeprowadzona przez ich wierzchołek prostopadle do ich wspólnego ramienia, tworzy z pozostałemi ramionami kąty: $^5/_7 d$ — z ramieniem kąta ostrego i $^3/_7 d$ — z ramieniem kąta rozwartego. Znaleźć sumę kątów danych.

16. Z punktu C, leżącego na prostej AB, wyprowadzono prostą CD tak, że kąt ACD jest 4 razy większy od kąta BCD. Wyznaczyć te kąty.

17. 1) Wyznaczyć wielkość każdego z 2 kątów przyległych, z których jeden jest o $^2/_9 d$ większy od drugiego.

2) Wyznaczyć wielkość każdego z 2-ch kątów przyległych, jeżeli ich stosunek równy jest stosunkowi $3:5$.

18. Znaleźć kąt, równający się $^3/_7$ swego przyległego.

19. Sprawdzić, czy ramiona AB i BD dwóch kątów sąsiednich ABC i DBC—tworzą jedną linję prostą, jeżeli $\sphericalangle ABC = {}^6/_5 d$, a $\sphericalangle DBC$ jest $1^1/_2$ raza mniejszy od $\sphericalangle ABC$.

---

[1] W kierunku od A do B.

[2] Przypuszczając, że każda para prostych przecina się w innym punkcie.

20. Sprawdzić, czy dwa sąsiednie kąty są przyległe, jeżeli ich stosunek równa się $7:3$ i różnica $= {}^4/_5 d$.

21. Kąty ABC i CBD są przyległe: $\sphericalangle CBD = {}^3/_8 d$. Wyznaczyć kąt pomiędzy prostopadłą, wystawioną z punktu B do prostej AD, i dwusieczną kąta ABC.

22. 1) Wyznaczyć wielkość kąta pomiędzy dwusiecznemi kątów przyległych.

2) Jeden z kątów przyległych podzielono na połowy i do przeprowadzonej dwusiecznej wyprowadzono prostopadłą ze wspólnego wierzchołka wewnątrz drugiego kąta przyległego; dowieść, że ta prostopadła jest dwusieczną drugiego kąta przyległego.

23. Znaleźć dwa kąty sąsiednie AOB i BOC, wiedząc, że ich suma $= {}^{12}/_5 d$, oraz że przedłużenie ramienia AO (poza wierzchołek) dzieli kąt BOC na pół.

24. 1) Z pomiędzy czterech kątów sąsiednich, położonych z jednej strony prostej, każdy następny jest większy od poprzedniego o $^1/_9 d$. Wyznaczyć te kąty.

2) Kąty AOB, BOC, COD i DOE są równe i dają w sumie kąt półpełny. Określić kierunki ich ramion.

25. Z pomiędzy trzech kątów sąsiednich, położonych z jednej strony prostej, skrajne stosują się do siebie tak, jak $3:5$, a środkowy równa się różnicy skrajnych. Znaleźć te kąty.

26. Dokoła jednego punktu położonych jest 20 kątów równych. Wyznaczyć wielkość każdego z tych kątów.

27. Kąty AOB, BOC, COD i DOA stosują się do siebie tak, jak $4:5:6:3$. Określić kierunek ramion AO i OC.

28. Kąt $ABC = {}^6/_{11} d$; z wierzchołka B wyprowadzono nazewnątrz kąta ABC prostą BD, jednakowo pochyloną do AB i BC. Wyznaczyć wielkość tego pochylenia.

29. Jeden z dwóch kątów wierzchołkiem przeciwległych jest 5 razy większy od swego przyległego. Wyznaczyć drugi kąt przeciwległy.

30. Kąt wierzchołkiem przeciwległy względem danego jest o $2d$ mniejszy od sumy kątów przyległych do tego ostatniego. Znaleźć kąt dany.

31. Proste AB i CD przecinają się w punkcie O. Suma kątów AOD i COB równa się $^{22}/_9 d$. Wyznaczyć kąt AOC.

32. Suma kąta danego i dwóch kątów przyległych do niego $= 2^3/_8 d$. Wyznaczyć wielkość kąta danego.

33. Z pomiędzy czterech kątów, położonych dokoła jednego punktu, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$, $\sphericalangle AOB = {}^5/_{17} d$ i $\sphericalangle DOC = {}^9/_{17} d$. Ramiona AO i BO są przedłużone za wierzchołek O w kierunku OE i OF. Wyznaczyć kąty COE i DOF.

Trójkąty i wielokąty. Prostopadłe i pochyłe.

34. Odnaleźć długość boków 4-kąta, jeżeli ich stosunek wzajemny równa się 2 : 5 : 4 : 8, a obwód 4-kąta wynosi 76 m.

35. Czy stosunek boków 4-kąta może być równy stosunkowi 2 : 3 : 4 : 10?

36. Przekątna dzieli 4-kąt na dwa trójkąty, których obwody wynoszą 25 cm i 27 cm. Odnaleźć długość przekątnej, jeżeli obwód 4-kąta = 32 cm.

37. Ile przekątnych można przeprowadzić w n-kącie:
a) z jednego wierzchołka, b) ze wszystkich wierzchołków? ($n=10$; $n=20$; $n=25$).

38. Ile boków ma wielokąt, jeżeli ich liczba jest m razy większa od liczby przekątnych, wykreślonych z jednego wierzchołka? ($m=2$; 4; 5).

39. Ile boków ma wielokąt, jeżeli liczba wszystkich jego przekątnych jest m razy większa od liczby jego boków? ($m={}^1/_2$; 1; 2; ${}^5/_2$).

40. Obwód trójkąta równoramiennego $=1^1/_2$ dm, a podstawa = 8 cm. Wyznaczyć długość ramienia.

41. Na ramieniu trójkąta równoramiennego zbudowano trójkąt równoboczny, którego obwód równa się 45 cm. Odnaleźć podstawę trójkąta równoramiennego, jeżeli jego obwód = 40 cm.

42. Czy można zbudować trójkąt, którego boki równałyby się: 1) 5 jedn., 10 jedn., 12 jedn.; 2) 1 m, 1 dm, 15 cm; 3) 21 cm, 12 cm, 9 cm.

43. Dwa boki trójkąta są równe odpowiednio: 21 cm i 7 cm. Odnaleźć trzeci bok, wiedząc, że długość jego wyraża się w całkowitych decymetrach.

44. W trójkącie równoramiennym jeden bok ma 25 dm, a drugi 10 dm. Który z nich jest podstawą?

45. Dowieść, że bok w trójkącie jest mniejszy od połowy obwodu.

46*. Dowieść, że suma odległości jakiegokolwiek punktu wewnątrz trójkąta od jego wierzchołków jest: 1) mniejsza od obwodu; 2) większa od połowy obwodu.

47. Dwa boki i wysokość wewnętrzna jednego trójkąta są odpowiednio równe dwom bokom i wysokości zewnętrznej drugiego trójkąta. Podstawa pierwszego trójkąta = 24 cm i wysokość dzieli ją w stosunku 3 : 5. Znaleźć podstawę drugiego trójkąta.

48. Wewnątrz trójkąta ABC przeprowadzono do boku BC prostą AD tak, że $\angle CAD = \angle ACD$. Obwody trójkątów ABC i ABD są równe 3 dm 7 cm i 2 dm 4 cm. Wyznaczyć długość AC.

49. W trójkącie równoramiennym ABC spuszczono wysokość BD. Obwód trójkąta $ABC=50$ jedn., a obwód trójkąta $ABD=40$ jedn. Wyznaczyć wysokość BD.

50. W trójkącie równoramiennym ABC ramię $AB=14$ cm; ze środka D tego ramienia wystawiono prostopadłą DE do przecięcia z bokiem BC i punkt E połączono z A; obwód trójkąta AEC równa się 24 cm. Wyznaczyć długość AC.

51. 1) Z jednego punktu wyprowadzono do danej prostej dwie pochyłe równe; odległość pomiędzy ich spodkami = 1 m 4 cm. Obliczyć rzut każdej z pochyłych na prostą.

2) Z punktu A nad prostą wyprowadzono do niej prostopadłą AO i pochyłą AB, których stosunek wzajemny wynosi ${}^4/_8$. Na przedłużeniu AO poza prostą wzięto punkt D taki, aby było $BD=BA$. Obliczyć obwód ABD, wiedząc, że $AB=8$ cm.

52. W trójkącie równoramiennym ABC, którego podstawą jest bok AC, przeprowadzono środkowe AD i CE. Obwód trójkąta AEC jest o 5 większy od obwodu trójkąta ABD, a obwód trójkąta $ABC=35$. Obliczyć boki trójkąta ABC.

Proste równoległe. Suma kątów trójkąta i wielokąta.

53. Dwie proste równoległe przecina sieczna. Jeden z ośmiu otrzymanych kątów $={}^4/_5\ d$. Odnaleźć każdy z kątów pozostałych.

54. Dwie proste równoległe przecina sieczna, przytem jeden z kątów wewnętrznych $={}^{11}/_8\ d$. Pod jakim kątem dwusieczna tego kąta przetnie drugą równoległą?

55. Dwie proste równoległe przecina sieczna. Suma trzech kątów: danego wewnętrznego, wewnętrznego jednostronnego dlań i naprzemianległego $={}^{23}/_7\ d$. Wyznaczyć kąt odpowiedni dla danego wewnętrznego.

56. 1) Proste AMB i CND przecina prosta $EMNF$; $\angle CNF = 1^3/_{16}\ d$ i $\angle NMB={}^3/_4\ d$. Sprawdzić, czy dane proste są równoległe; jak należy zmienić wielkość kąta NMB, ażeby dane proste były równoległe?

2) Kąt dany $=1^1/_3\ d$. Z dowolnego punktu wyprowadzono dwie proste równoległe do ramion tego kąta. Wyznaczyć kąty pomiędzy temi równoległemi.

57. Proste $AMNB$ i $CRSD$ przecinają proste $EMRF$ i $GNSH$. $\angle AME = {}^{29}/_{24}\,d$, $\angle ANS = {}^{11}/_{8}\,d$ i $\angle MRS = {}^{19}/_{24}\,d$. Odnaleźć $\angle DSH$.

58. W trójkącie jeden kąt $= {}^{7}/_{6}\,d$, a drugi $= {}^{3}/_{8}\,d$. Odnaleźć trzeci kąt.

59. Wyznaczyć kąty trójkąta, jeżeli wiadomo, że zależność pomiędzy niemi wyrażona jest przez stosunek 1 : 2 : 3.

60. Dwa kąty trójkąta stosują się do siebie, jak 5 : 7, a kąt trzeci jest o ${}^{4}/_{19}\,d$ większy od pierwszego. Odnaleźć trzeci kąt.

61. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego $= {}^{12}/_{17}\,d$. Odnaleźć drugi kąt ostry.

62. 1) W trójkącie prostokątnym jeden z kątów $= {}^{1}/_{2}\,d$. Odnaleźć przyprostokątne, jeżeli ich suma = 3 dm 6 cm.

2) W trójkącie prostokątnym jeden z kątów $= {}^{1}/_{2}\,d$. Wyznaczyć przeciwprostokątną, jeżeli wiadomo, że suma przeciwprostokątnej i odpowiedniej wysokości wynosi 12 cm.

63. Określić kształt kąta przy wierzchołku w trójkącie równoramiennym, w którym są dane podstawa i wysokość (lub ich stosunek): 1) 1 m i 4 dm; 2) 6 : 5; 3) 12 cm i 6 cm.

64. W trójkącie równoramiennym kąt przy wierzchołku $= {}^{9}/_{7}\,d$. Znaleźć kąt przy podstawie.

65. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie $= {}^{5}/_{9}\,d$. Znaleźć kąt przy wierzchołku.

66. 1) W trójkącie równoramiennym kąt pomiędzy wysokością i ramieniem jest o ${}^{1}/_{7}\,d$ mniejszy od kąta przy podstawie. Znaleźć kąty tego trójkąta.

2) Podstawę i jedno ramię trójkąta równoramiennego przecięto sieczną równoległą do drugiego ramienia. Dowieść, że powstały przytem mniejszy trójkąt jest także równoramienny.

3) Dowieść tego samego, przecinając trójkąt równoramienny prostą równoległą do podstawy.

67*. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych $= {}^{2}/_{3}\,d$, a suma przeciwprostokątnej i mniejszej przyprostokątnej = 18 cm. Odnaleźć przeciwprostokątną.

68. W trójkącie ABC kąt zewnętrzny przy wierzchołku B jest trzy razy większy od kąta A i o ${}^{4}/_{9}\,d$ większy od kąta C. Obliczyć kąty trójkąta.

69. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest większy od kąta przy wierzchołku o ${}^{1}/_{10}\,d$. Znaleźć te kąty.

70. W trójkącie równoramiennym suma kątów wewnętrznych razem z jednym zewnętrznym wynosi ${}^{21}/_{8}\,d$. Obliczyć kąty tego trójkąta.

71. Pod jakim kątem przecinają się dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych jednostronnych przy prostych równoległych?

72. W trójkącie ABC kąt B jest prosty. M — jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów A i C. Znaleźć $\angle AMC$.

73. Dwusieczne kątów A i C trójkąta ABC przecinają się w punkcie M. Wyznaczyć kąt ABC, jeżeli jest on równy połowie kąta AMC.

74. W trójkącie ABC kąt B jest prosty; AD i CE są przedłużeniami przeciwprostokątnej AC. Kąty BAD i BCE podzielono na pół dwusiecznemi, przecinającemi się w punkcie M. Znaleźć kąt AMC.

75. W trójkącie równoramiennym kąt pomiędzy podstawą i wysokością boczną $= {}^{8}/_{15}\,d$. Obliczyć kąty tego trójkąta.

76. W trójkącie równoramiennym ABC wysokość boczna AD tworzy z ramieniem AB kąt $BAD = {}^{1}/_{5}\,d$. Wyznaczyć kąty tego trójkąta, przypuszczając, że wysokość AD przechodzi 1) wewnątrz trójkąta i 2) zewnątrz trójkąta.

77. ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AC; CD jest dwusieczną kąta C; $\angle ADC = {}^{5}/_{3}\,d$. Znaleźć $\angle B$.

78. Dowieść, że jeżeli w trójkącie linja środkowa jest równa połowie odpowiedniego boku, to kąt, leżący naprzeciwko tego boku, jest prosty.

79. W trójkącie ABC bok AC przedłużono za punkt C na odległość $CE = CB$ i za punkt A na odległość $AD = AB$; punkty E i D połączono z B. Wyrazić kąty trójkąta DBE przy pomocy kątów trójkąta ABC.

80. W trójkącie ABC spuszczono wysokości AD i CE; M jest punktem ich przecięcia. Wyznaczyć $\angle AMC$, jeżeli $\angle BAC = {}^{1}/_{4}\,d$ i $\angle BCA = {}^{5}/_{6}\,d$.

81. W trójkącie równoramiennym ABC wysokości boczne AD i CE tworzą $\angle AMC = {}^{8}/_{15}\,d$. Obliczyć kąty trójkąta ABC.

82. W trójkącie ABC z wierzchołka C wyprowadzono dwusieczne kątów wewnętrznego i zewnętrznego; pierwsza dwusieczna tworzy z bokiem AB kąt $= {}^{6}/_{17}\,d$. Jaki kąt tworzy z przedłużeniem boku AB druga dwusieczna?

83. Ze środka przeciwprostokątnej wyprowadzono prostopadłą do przecięcia z przyprostokątną; jeżeli punkt przecięcia połączymy z końcem drugiej przyprostokątnej, to odpowiedni kąt trójkąta podzieli się w stosunku 2 : 5 (mniejsza część znajduje się przy przeciwprostokątnej). Znaleźć ten kąt.

84. $ABCDE$ jest linją łamaną wypukłą; $\angle ABC = {}^{4}/_{3}\,d$; $\angle BCD = {}^{3}/_{4}\,d$; $\angle CDE = {}^{23}/_{12}\,d$. Rozstrzygnąć, czy proste AB i DE są równoległe.

85. Wyznaczyć sumę kątów wewnętrznych: 1) siedmiokąta; 2) dziesięciokąta i 3) dwudziestopięciokąta.

86. Jak zmieni się suma kątów wielokąta, jeżeli liczbę boków zwiększymy o 5?

87. Ile boków ma wielokąt, jeżeli suma jego kątów jest równa: 1) 30 d; 2) 48 d; 3) 57 d?

88. Ile boków ma wielokąt, jeżeli suma jego kątów wewnętrznych razem z jednym zewnętrznym wynosi 23 d?

89. Wyznaczyć liczbę boków wielokąta, jeżeli suma jego kątów wewnętrznych jest m razy większa od sumy kątów zewnętrznych (wziętych po jednym przy każdym wierzchołku).

90. Obliczyć kąty 4-kąta, jeżeli pierwsze dwa z nich mają się do siebie, jak $5:7$, trzeci jest równy ich różnicy, a czwarty jest mniejszy od trzeciego o $^4/_{11}$ d.

Równoległoboki i trapezy.

91. Jeden z kątów równoległoboku równa się $^3/_7\,d$. Znaleźć kąty pozostałe.

92. Obliczyć nierówne kąty równoległoboku, jeżeli jeden z nich jest o $^3/_{11}\,d$ większy od drugiego.

93. W równoległoboku $ABCD$ bok AB równa się 9 cm i stanowi $^3/_{10}$ obwodu. Odnaleźć pozostałe boki tego równoległoboku.

94. Boki nierówne równoległoboku mają się do siebie, jak $3:4$, a obwód jego jest równy 28 cm. Odnaleźć boki tego równoległoboku.

95. W równoległoboku $ABCD$ przeprowadzono dwusieczną kąta A, która przecina bok BC w punkcie E. Odnaleźć odcinki BE i EC, jeżeli $AB = 9$ jedn., $AD = 15$ jedn.

96. W równoległoboku $ABCD$ przeprowadzono przekątne AC i BD. Obwód trójkąta ABC jest o 4 dm większy od obwodu trójkąta BCD, a suma tych obwodów jest o 1 metr większa od obwodu równoległoboku. Znaleźć przekątne równoległoboku.

97. Rozstrzygnąć, czy przekątne równoległoboku, w którym jeden z boków równy jest 5, mogą być wyrażone zapomocą liczb następujących: 1) 4 i 6; 2) 4 i 3; 3) 6 i 7.

98. Przekątne dzielą równoległobok na 4 trójkąty; różnica pomiędzy obwodami dwóch trójkątów przyległych jest równa 1 m. Odnaleźć boki równoległoboku, jeżeli jego obwód = 12 m.

99. W równoległoboku $ABCD$ przez punkt przecięcia przekątnych przeprowadzono prostą, która odcina na bokach BC i AD odcinki: $BE = 20$ cm i $AF = 28$ cm; odnaleźć boki BC i AD.

100. W równoległoboku kąt pomiędzy wysokościami, wyprowadzonemi z wierzchołka kąta ostrego, wynosi $^{16}/_{11}\,d$. Wyznaczyć kąty równoległoboku.

101. W równoległoboku $ABCD$ wysokość, wyprowadzona z wierzchołka B, dzieli podstawę AD na dwie części równe. Odnaleźć przekątną BD, jeżeli wiadomo, że obwód równoległoboku, wynoszący 3,8 dm, przewyższa obwód trójkąta ABD o 1 dm.

102. W prostokącie przekątna i bok tworzą kąt $= {}^2/_5\,d$. Wyznaczyć kąt pomiędzy przekątnemi, znajdujący się naprzeciwko boku mniejszego.

103. Wyznaczyć kąt pomiędzy bokiem i przekątną prostokąta, jeżeli wiadomo, że kąt ten jest o $^1/_3\,d$ mniejszy od kąta pomiędzy przekątnemi, opartego na tym samym boku.

104. W prostokącie różnica odległości punktu przecięcia przekątnych od boków wynosi 4 cm. Obwód prostokąta = 56 cm. Odnaleźć jego boki.

105. W prostokącie przekątne przecinają się pod kątem $= {}^2/_3\,d$. Suma przekątnych i dwóch mniejszych boków = 36 cm. Wyznaczyć długość przekątnych.

106. Odnaleźć boki prostokąta $ABCD$, którego obwód = 24 cm, i proste AM i DM, łączące środek M boku BC z końcami boku AD, są względem siebie prostopadłe.

107. Prostopadła, spuszczona z wierzchołka prostokąta na jego przekątną, dzieli tę ostatnią w stosunku $1:3$. Znaleźć długość przekątnej, jeżeli punkt przecięcia przekątnych jest oddalony od większego boku o 20 cm.

108. Bok ukośnika (rombu) tworzy z jego przekątnemi kąty, których różnica $= {}^3/_{17}\,d$. Obliczyć kąty ukośnika.

109. Kąty, utworzone przez bok rombu z jego przekątnemi, znajdują się w stosunku $5:4$. Obliczyć kąty rombu.

110. Wyznaczyć kąty ukośnika, jeżeli wysokość, wyprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli bok przeciwległy na połowy.

111. W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano kwadrat w taki sposób, że dwa jego wierzchołki znajdują się na przeciwprostokątnej, a pozostałe dwa — na przyprostokątnych. Odnaleźć bok kwadratu, jeżeli przeciwprostokątna = 84 cm.

112. W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano prostokąt w ten sposób, że podstawa dolna leży na przeciwprostokątnej, a końce podstawy górnej — na przyprostokątnych. Odnaleźć podstawę i wysokość prostokąta, jeżeli ich stosunek wynosi $5:2$, a przeciwprostokątna trójkąta jest równa 45 dm.

113. W trójkąt równoramienny wpisano prostokąt, którego przekątne są równoległe do ramion trójkąta. Obliczyć boki prostokąta, jeżeli podstawa trójkąta jest równa 24 cm, a wysokość 9 cm.

114. W kwadrat wpisano prostokąt tak, że na każdym boku kwadratu znajduje się jeden wierzchołek prostokąta. Odnaleźć boki tego prostokąta, jeżeli wiadomo, że jeden z nich jest dwa razy większy od drugiego i że przekątna kwadratu jest równą 12 cm.

115. W trapezie $ABCD$ z wierzchołka B wyprowadzono prostą, równoległą do boku CD. Prosta ta przecina większą podstawę AD w punkcie E. Obwód trójkąta ABE równa się 1 m, a długość ED równa się 3 dm. Znaleźć obwód trapezu.

116*. Jeden z boków nierównoległych trapezu podzielono na 6 części równych. Przez punkty podziału poprowadzono do drugiego boku proste równoległe do podstawy. Wyznaczyć długości tych równoległych, jeżeli podstawy trapezu są równe odpowiednio 10 i 28 jednostkom długości.

117. W trapezie $ABCD$ (AD—większa podstawa) jest $AC \perp CD$, $AB = BC$ i $\angle CAD = {}^2/_7\, d$. Obliczyć kąty tego trapezu.

118. W trapezie $ABCD$ (AD — większa podstawa) przekątna AC jest prostopadła do boku CD i dzieli kąt BAD na dwie części równe; $\angle BAD = {}^2/_3\, d$. Obwód trapezu = 20 dm. Znaleźć AD.

119. Czy kąty A, B, C i D trapezu $ABCD$, którego podstawą dolną jest AD, mogą znajdować się w stosunku 2 : 5 : 6 : 3?

120. Stosunek podstaw trapezu równy jest stosunkowi 7 : 3, a ich różnica wynosi 32 cm. Znaleźć długość linji środkowej [1]) trapezu.

121. Podstawy trapezu są równe: 24 cm i 30 cm. Wewnątrz tego trapezu przeprowadzono prostą równoległą do podstaw, której długość wynosi 28 cm. Sprawdzić, czy ta prosta jest jednakowo oddalona od podstaw trapezu, a jeżeli nie, to do której z nich jest bliższa?

122. W trapezie $ABCD$ ze środka E boku AB wyprowadzono linję środkową do przecięcia w punkcie F z bokiem CD; z wierzchołka B poprowadzono równoległą do boku CD — do przecięcia z większą podstawą AD w punkcie G. Odnaleźć długość podstaw trapezu, jeżeli $EF = 12$ cm i $AG = 1$ cm.

123. W trapezie $ABCD$ ze środka E boku AB poprowadzono prostą równoległą do boku CD do przecięcia z większą podstawą AD w punkcie G. Odnaleźć podstawy trapezu, jeżeli $AG = 5$ dm i $GD = 2{,}5$ m.

---

[1]) T. j. linji, łączącej środki boków nierównoległych trapezu.

124. W trapezie równoramiennym długość ramienia jest równa linji środkowej trapezu, a obwód wynosi 2,4 dm. Znaleźć ramię trapezu.

125. Wyznaczyć kąty trapezu równoramiennego, jeżeli różnica kątów przeciwległych $= {}^8/_{13}\, d$.

126. Wyznaczyć kąty trapezu równoramiennego, którego podstawa górna jest równa jednemu z ramion, a przekątna jest prostopadła do ramienia.

127. $ABCD$ jest trapez równoramienny; AD — jego podstawa większa; AC—przekątna. Różnica pomiędzy obwodami trójkątów ACD i BAC wynosi 6 dm, a linja środkowa = 12 dm. Odnaleźć podstawy.

128. 1) W trapezie równoramiennym przekątna dzieli kąt ostry na dwie części równe; obwód tego trapezu = 45 cm, a większa podstawa = 15 cm. Odnaleźć podstawę mniejszą.

2) W trapezie równoramiennym przekątna dzieli kąt rozwarty na dwie części równe; większa podstawa jest mniejszą od obwodu o a, a linja środkowa $= b$. Odnaleźć podstawę mniejszą.

129. W trapezie równoramiennym wysokość, spuszczona z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli podstawę większą na odcinki: 6 cm i 30 cm. Obliczyć podstawy tego trapezu.

130. $ABCD$ jest trapez równoramienny, AD— podstawa większa, CE — wysokość, spuszczona na AD; $DE = 1{,}25$ cm; linja środkowa = 2,75 cm. Obliczyć podstawy trapezu.

131. W trapezie równoramiennym podstawa większa ma 27 cm, ramię 10 cm, a kąt pomiędzy niemi $= {}^2/_3\, d$. Odnaleźć podstawę mniejszą.

132. W trapezie równoramiennym kąt ostry $= {}^1/_2\, d$; wysokość $= n$, a linja środkowa $= m$. Obliczyć podstawy trapezu.

133*. W trapezie prostokątnym $ABCD$ kąt ostry $ADC = {}^1/_2\, d$, a bok $AD = a$. W środku E boku CD wzniesiona jest prostopadła, która spotyka przedłużenie boku AB w punkcie F. Wyznaczyć długość BF.

134. Linja środkowa trapezu = 8 dm, przekątna dzieli ją na dwa odcinki, których różnica wynosi 2 dm. Obliczyć podstawy trapezu.

135. Znaleźć stosunek pomiędzy bokami równoległemi trapezu, jeżeli przekątne dzielą linję środkową na trzy części równe.

136. Boki trójkąta znajdują się w stosunku 3 : 4 : 6; łącząc środki wszystkich boków, otrzymujemy obwód = 52 cm. Odnaleźć boki tego trójkąta.

137. W 4-kącie przekątne są równe 1 m i 8 dm i przecinają się pod kątem ${}^5/_8\, d$. Obliczyć boki i kąty 4-kąta, który otrzymamy przez połączenie środków boków danego.

Okrąg. Mierzenie kątów zapomocą łuków. Okrąg (koło) wpisany i opisany. Położenie okręgów względem siebie.

138. 1) Promień koła = 10 cm; odległość danego punktu od środka koła wynosi 15 cm. Znaleźć największą i najmniejszą odległość danego punktu od okręgu.

2) Promień koła = 10 cm; odległość danego punktu od środka koła wynosi 3 cm. Znaleźć największą i najmniejszą odległość danego punktu od okręgu.

3) Na prostej, położonej nazewnątrz okręgu, znaleźć punkt, najmniej od tego okręgu oddalony.

139. Najmniejsza odległość danego punktu od okręgu jest równa a, największa—b. Znaleźć promień koła.

140. Z jednego punktu okręgu wychodzą dwie nawzajem prostopadłe cięciwy; ich odległości od środka koła wynoszą: 6 cm i 10 cm. Oznaczyć długość każdej cięciwy.

141. Końce średnicy są oddalone od stycznej odpowiednio o 16 cm i 6 cm. Wyznaczyć długość średnicy.

142. Następujące kąty wyznaczyć w stopniach:

1) $\frac{d}{5}$; 2) 0,25 d; 3) $^1/_{32}\,d$; 4) $^5/_6\,d$; 5) $^{17}/_{24}\,d$; 6) $^{32}/_{11}\,d$.

143. Wyrazić w stopniach, minutach i sekundach następujące części okręgu: 1) $^1/_{72}$; 2) $^1/_{81}$; 3) 0,001; 4) $^1/_{14}$; 5) $^5/_{11}$.

144. Oznaczyć, jaką część okręgu stanowią łuki: 1) 15°; 2) 22°30′; 3) 108°; 4) 24′; 5) 18″; 6) 18°45′; 7) 2°0′30″; 8) 10′40″; 9) 36°12′17″.

145. Wyznaczyć kąt pomiędzy wskazówkami zegara, gdy te wskazują: 1) 5 g.; 2) 3 g. 25 m.; 3) 4 g. 50 m.

146. Znaleźć dopełnienia do kąta prostego następujących kątów ostrych: 1) 70°; 2) 34°23′; 3) 22°42′38″.

147. Wyliczyć wielkość kąta przyległego do następujących kątów danych: 1) 137°; 2) 26°37′; 3) 54°0′17″.

148. Dokoła punktu znajduje się 48 kątów równych. Wyznaczyć wielkość jednego z nich.

149. Ramiona kątów rozwartego i ostrego są odpowiednio równoległe; kąt rozwarty jest większy od ostrego o 12°18′54″. Wyznaczyć kąt ostry.

150. W trójkącie dwa kąty są równe odpowiednio: 110°23′52″ i 24°36′41″. Obliczyć trzeci kąt.

151. 1) W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest równy 58°20′32″. Znaleźć drugi kąt ostry.

2) W trójkącie prostokątnym spuszczono wysokość z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną. Na jakie części wysokość ta podzieliła kąt prosty, jeżeli jeden z kątów ostrych trójkąta posiada 25°?

3) Dowieść, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ostrych = 30°, jest połową odpowiedniego trójkąta równobocznego.

152. W trójkącie równoramiennym kąt przy wierzchołku = = 105°0′27″. Wyznaczyć kąt przy podstawie.

153. 1) W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie = = 70°43′8″. Wyznaczyć kąt przy wierzchołku.

2) Jeden z kątów rombu ma 40°; obliczyć kąty w trójkątach, na jakie dzieli romb każda z przekątnych oddzielnie, oraz w trójkątach, otrzymanych z podziału rombu obydwiema przekątnemi równocześnie.

3) W prostokącie przekątna dzieli kąt przy wierzchołku na części, z których jedna = 50°; obliczyć kąty pomiędzy przekątnemi prostokąta.

154. Obliczyć kąty trójkąta, jeżeli ich stosunek jest równy 12 : 9 : 11.

155. Obliczyć kąty 4-kąta, jeżeli ich stosunek jest równy 4 : 7 : 6 : 10.

156. Obliczyć wielkość kąta w równokątnym 16-kącie; 50-kącie; 28-kącie.

157. 1) W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie = = 45°, a podstawa jest dłuższa od wysokości o 26 cm. Znaleźć podstawę.

2) W prostokącie mniejszy kąt pomiędzy przekątnemi ma 60°. Znaleźć długość przekątnej, jeżeli mniejszy z boków prostokąta = 0,5 m.

158. AB i AC są styczne do jednego okręgu. $\angle BAC = 60°$, łamana $BAC = 1$ metr. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami styczności B i C.

159. Cięciwa, podpierająca łuk 90°, jest równa 24 cm. Wyznaczyć odległość cięciwy od środka koła.

160. Wyznaczyć odległość cięciwy, podpierającej łuk 120°, od środka koła, którego promień jest równy 14 cm.

161. Kąt pomiędzy dwoma promieniami wynosi 102°0′37″. Wyznaczyć kąt pomiędzy stycznemi, wyprowadzonemi z końców tych promieni.

162. Wyznaczyć wielkość łuku, jeżeli podpierająca go cięciwa tworzy z promieniem, poprowadzonym do jej końca, kąt 37°23′.

163. Łuk jest równy $117^0 23' 42''$. Wyznaczyć kąt, zawarty pomiędzy cięciwą i przedłużeniem promienia, przechodzącego przez koniec łuku.

164. Łuk $AB = 73^0 27' 43''$; z końca B tego łuku wyprowadzono styczną, która spotyka przedłużenie promienia OA w punkcie C. Wyznaczyć $\angle ACB$.

165. Punkty A i B dzielą okrąg na części ACB i ADB. Nakreśliwszy cięciwy CA i CB, wyznaczyć kąt ACB przy następujących warunkach:

a) jeżeli łuk ADB = 1) $70^0 23'$; 2) $117^0 28'$; 3) $315^0 40' 24''$;

b) jeżeli łuk ACB = 1) $51^0 20'$; 2) $104^0 26'$; 3) 214^0.

166. ABC jest sieczna; BD—cięciwa; $\smile BD = 43^0$; $\smile BDC = 213^0 41'$. Wyznaczyć $\angle ABD$.

167. Obliczyć kąt wpisany w łuk, stanowiący $^{17}/_{32}$ okręgu.

168. Obliczyć łuk, który zawiera kąt równy $37^0 21' 43''$.

169. Łuk $= 84^0 52' 18''$. Pod jakim kątem z punktów tego łuku widać jego cięciwę?

170. Cięciwa dzieli okrąg w stosunku $5:11$. Wyznaczyć wielkość kątów wpisanych, opartych na tej cięciwie.

171. AB i AC są dwie cięciwy; $\smile AB = 110^0 23'$; $\smile AC = 38^0$. Wyznaczyć kąt BAC.

172. Cięciwa AB dzieli okrąg na dwa łuki, z których mniejszy $= 130^0$, łuk większy cięciwa AC dzieli w stosunku $31:15$ (licząc od A). Wyznaczyć $\angle BAC$.

173. Cięciwy AB i AC znajdują się z różnych stron środka koła i tworzą $\angle BAC = 72^0 30'$. $\smile AB : \smile AC = 19:24$. Obliczyć te łuki.

174. Okrąg został podzielony w stosunku $7:11:6$ i punkty podziału połączone. Wyznaczyć kąty otrzymanego trójkąta.

175. Wyznaczyć wielkość łuku, jeżeli prostopadła, wzniesiona na końcu cięciwy, dzieli dopełniający (do okręgu) łuk w stosunku $5:2$.

176. Jeżeli w trójkącie linja środkowa jest równa połowie odpowiedniego boku, to kąt naprzeciwko tego boku jest prosty. Dowieść tego zapomocą okręgu pomocniczego.

177. Między punktami A i B nakreślono dwa łuki, zwrócone wypukłościami w różne strony; $\smile ACB = 117^0 23'$ i $\smile ADB = 42^0 37'$; środki ich C i D połączono z A. Wyznaczyć $\angle CAD$.

178. W odcinek kołowy AMB wpisano trapez $ACDB$, którego boki AC i CD są równe i $\angle CAB = 51^0 20'$. Wyznaczyć wielkość łuku AMB.

179. AB jest średnica; C, D i E—punkty na jednym półokręgu $ACDEB$. Na średnicy AB wzięto dwa punkty F i G, przyczem $\angle CFA = \angle DFB$ i $\angle DGA = \angle EGB$. Wyznaczyć $\angle FDG$, jeżeli $\smile AC = 60^0$ i $\smile BE = 20^0$.

180. Przez koniec cięciwy, dzielącej okrąg w stosunku $3:5$, przeprowadzono styczną. Wyznaczyć kąt ostry, zawarty pomiędzy cięciwą i styczną.

181. Przez koniec cięciwy przeprowadzono styczną. Kąt rozwarty pomiędzy niemi jest większy od kąta środkowego, odpowiadającego tejże cięciwie, o 54^0. Obliczyć łuk mniejszy.

182. AB i AC są cięciwy równe; MAN—styczna; $\smile BC = 213^0 42'$. Wyznaczyć kąty MAB i NAC.

183. C jest punkt na przedłużeniu średnicy AB; CD—styczna; $\angle ADC = 114^0 25' 38''$. Znaleźć łuk BD.

184. W trójkącie ABC kąt C jest prosty; AMC i BNC są dwa łuki wewnątrz trójkąta ABC, dla których przeciwprostokątna AB jest styczną. Obliczyć łuk BNC, jeżeli łuk AMC równa się $100^0 47' 24''$.

185. Okrąg podzielono w punktach A, B, C i D tak, że $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 2:3:5:6$. Przeprowadzone przez odpowiednie punkty cięciwy AC i BD przecinają się w punkcie M. Wyznaczyć $\angle AMB$.

186. Średnica AB i cięciwa CD przecinają się w punkcie M; $\angle CMB = 73^0$; $\smile BC = 110^0$. Znaleźć łuk BD.

187. Dowieść, że kąt, oparty na średnicy i mający wierzchołek wewnątrz koła, jest rozwarty.

188. Cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie M; $\angle AMC = 40^0$; łuk AD jest większy od łuku CB o $20^0 54'$. Znaleźć łuk AD.

189. Przez końce łuku AB, mającego m^0, przechodzą przecinające się cięciwy AC i BD w ten sposób, że kąt DMC, utworzony przy ich przecięciu, jest równy kątowi DNC, wpisanemu w łuk DC. Znaleźć ten łuk.

190. W 4-kącie $ABCD$ kąty B i D są proste; przekątna AC tworzy z bokiem AB kąt 40^0, a z bokiem AD kąt 30^0. Wyznaczyć kąt ostry, zawarty pomiędzy przekątnemi AC i BD.

191. Okrąg podzielono w punktach A, B, C i D tak, że $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3:2:13:7$. Cięciwy AD i BC przedłużono do przecięcia w punkcie M. Wyznaczyć kąt AMB.

192. Kąt, zawarty pomiędzy siecznemi AMN i APQ, jest równy $37^0 15'$, a kąt pomiędzy cięciwami MQ i NP, zwrócony otworem do A, jest równy $112^0 45'$. Obliczyć łuki MP i NQ.

193. Dowieść, że kąt, oparty na średnicy i mający wierzchołek za okręgiem, jest zawsze kątem ostrym.

194. Dany jest okrąg z cięciwą i styczną, nie przechodzącą przez koniec cięciwy. Znaleźć na stycznej punkt, z którego cięciwę widać pod największym kątem.

195. Sieczna ABC odcina łuk BC, mający 112^0; punkt styczności D stycznej AD dzieli ten łuk w stosunku $7:9$. Wyznaczyć $\angle BAD$.

196. AB jest styczna; ACD—sieczna; $\angle BAD = 25^0$; $\smile CB = {}^3/_7 \smile CD$ (położonego nazewnątrz kąta BAD). Oznaczyć położenie siecznej względem środka koła i stycznej.

UWAGA (dotycząca niektórych zadań następnych). Wyznaczając kąt opisany, należy pamiętać, że kąt pomiędzy dwiema stycznemi jest spełnieniem do 180^0 kąta pomiędzy promieniami, poprowadzonemi do punktów styczności.

197. Przez końce łuku $200^0\,30'\,42''$ przeprowadzono dwie nawzajem przecinające się styczne. Wyznaczyć kąt, zawarty pomiędzy niemi.

198. Kąt opisany jest równy $73^0\,25'\,37''$. Obliczyć łuki, zawarte pomiędzy jego ramionami.

199. Cięciwa dzieli okrąg w stosunku $11:16$. Wyznaczyć kąt, zawarty pomiędzy stycznemi, przechodzącemi przez końce cięciwy.

200. Okrąg podzielono w stosunku $5:9:10$ i przez punkty podziału przeprowadzono styczne. Wyznaczyć największy z kątów w otrzymanym trójkącie.

201. Przez końce łuku AB, mniejszego od 180^0, przeprowadzono styczne AC i BC, tworzące kąt ACB. Jak się zmieni ten kąt, jeżeli łuk AB zmniejszyć o m^0?

202. AB i AC są to dwie cięciwy, tworzące kąt $BAC = 74^0\,23'\,47''$; przez punkty B i C przeprowadzono styczne, przecinające się w punkcie M. Wyznaczyć $\angle BMC$.

203. Wewnątrz okręgu danego znajduje się drugi okrąg. ABC i ADE są to cięciwy większego okręgu i zarazem styczne do okręgu mniejszego w punktach B i D; BMD jest mniejszy z łuków zawartych pomiędzy punktami styczności; CNE jest łuk, zawarty pomiędzy końcami cięciw. Odnaleźć łuk CNE, jeżeli łuk $BMD = 130^0$.

204. Wewnątrz okręgu danego znajduje się drugi okrąg. CAE i DBF są to dwie cięciwy większego okręgu (nie przecinające się) i zarazem styczne do mniejszego okręgu w punktach A i B; AMB jest mniejszym z łuków pomiędzy punktami styczności, CND i EPF są łuki pomiędzy końcami cięciw. Obliczyć łuk CND, jeżeli $\smile AMB = 154^0$ i $\smile EPF = 70^0$.

205. 1) Wyznaczyć wielkość kąta opisanego, jeżeli odległość jego wierzchołka od okręgu jest równa promieniowi koła.

2) Kąt pomiędzy cięciwą i promieniem równa się a^0; obliczyć kąt opisany, oparty na tej samej cięciwie.

206. Łuk $AB = 40^0\,23'\,52''$. Na przedłużeniu promienia OA odmierzono część AC, równą cięciwie AB, i punkt C połączono z B. Wyznaczyć $\angle ACB$.

207. Łuk $ACDB = m^0$; łuk $CD = n^0$. Cięciwy AC i BD przedłużono do przecięcia się w punkcie M. Dowieść, że geometrycznem miejscem punktów M (przy rozmaitych położeniach łuku CD) jest łuk AMB i wyznaczyć wielkość tego łuku.

208. Łuk $ACDB = m^0$; łuk $CD = n^0$. Cięciwy AD i BC przecinają się w punkcie N. Dowieść, że geometrycznem miejscem punktów N (przy rozmaitych położeniach łuku CD) jest łuk ANB i wyznaczyć wielkość tego łuku.

209. W trójkącie ABC kąt C jest prosty. Z punktu C promieniem CA zakreślamy łuk ADE, przecinający przeciwprostokątną w punkcie D, a przyprostokątną CB w punkcie E. Obliczyć łuki AD i DE, jeżeli $\angle B = 37^0\,24'$.

210*. AB jest średnica; BC—styczna. Okrąg dzieli sieczną AC (w punkcie D) na dwie części równe. Wyznaczyć $\angle DAB$.

211. M jest środkiem wysokości BD w trójkącie równoramiennym ABC; ze środka M promieniem MD zakreślamy łuk pomiędzy bokami BA i BC. Wyznaczyć wielkość tego łuku, jeżeli $\angle BAC = 62^0\,17'$.

212. AB jest średnica; CD—cięciwa, równoległa do AB; łączymy punkt C z A i punkt D ze środkiem koła O. W trapezie $ACDO$ kąt $CDO = 32^0$. Wyznaczyć pozostałe kąty trapezu i kąt ostry pomiędzy jego przekątnemi.

213. Punkt O jest środkiem koła opisanego na trójkącie ABC. Wyznaczyć $\angle OAC$, 1) jeżeli $\angle B = 50^0$, 2) jeżeli $\angle B = 126^0$.

214. W trójkącie ABC kąt C jest prosty; O i O_1 są środki kół opisanego i wpisanego; $\angle OCO_1 = m^0$. Obliczyć kąty trójkąta ABC.

215. Promień OA koła opisanego tworzy z podstawą AC trójkąta równoramiennego ABC kąt $OAC = 20^0\,38'$. Wyznaczyć $\angle BAC$.

216. Punkt styczności koła, wpisanego w trójkąt równoramienny, dzieli ramię tego trójkąta w stosunku $7:5$ (licząc od wierzchołka). Wyznaczyć stosunek ramienia do podstawy.

217. Znaleźć przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego równoramiennego, jeżeli promień koła, wpisanego w ten trójkąt, równy jest r, a pół obwodu trójkąta $= p$.

218. W trójkąt ABC jest wpisane koło. Obliczyć odcinki boków, wyznaczone przez punkty styczności koła wpisanego, oznaczając boki naprzeciwko kątów A, B i C odpowiednio przez a, b i c, oraz przyjmując $\frac{a+b+c}{2}=p$.

219. Przekątna prostokąta tworzy z bokiem kąt $12^0 35'$. Na jakie cztery części podzielą wierzchołki prostokąta opisany na nim okrąg?

220. W romb wpisany jest okrąg. Odnaleźć części okręgu, zawarte pomiędzy punktami styczności, jeżeli kąt ostry rombu jest równy 37^0.

221. W trapezie równoramiennym kąt przy podstawie jest równy 50^0, a kąt, zawarty pomiędzy przekątnemi i zwrócony do ramienia, równy jest 40^0. Określić położenie (wewnętrzne albo zewnętrzne) środka okręgu opisanego.

222. Na kole opisany jest trapez, którego obwód równa się 12 cm. Wyznaczyć linję środkową tego trapezu.

223. Na kole jest opisany trapez równoramienny z kątem 30^0. Linja środkowa trapezu jest równa 1 m. Obliczyć promień koła.

224. W 4-kącie wpisanym $ABCD$ przekątna AC jest prostopadłą do przekątnej BD i dzieli ją na połowy. Obliczyć kąty tego 4-kąta, jeżeli $\angle BAD = 70^0 23' 42''$.

225. Czy można opisać koło na czworokącie, którego kąty, licząc pokolei, są w stosunku, jak 1) $2:4:5:3$, 2) $5:7:8:9$?

226. Kąt środkowy wycinka kołowego jest równy 60^0, a promień koła $= R$. Znaleźć promień koła, wpisanego w ten wycinek.

227. W 4-kącie $ABCD$ wyznaczyć kąt, zawarty pomiędzy przekątnemi i oparty na boku AB, jeżeli wiadomo, że $\angle ABC = 116^0$, $\angle ADC = 64^0$, $\angle CAB = 35^0$, $\angle CAD = 52^0$.

228. Dowieść, że w trójkącie prostokątnym linja środkowa względem przeciwprostokątnej jest równa połowie przeciwprostokątnej.

229*. Trójkąty ABC i ADC mają bok wspólny AC; boki AD i BC przecinają się w punkcie M. Kąty B i D są równe i wynoszą po 40^0. Odległość pomiędzy wierzchołkami B i D jest równa bokowi AB; kąt $AMC = 70^0$. Obliczyć kąty trójkątów ABC i ADC.

---

230. Odległość pomiędzy środkami dwóch okręgów jest równa 12 cm — przy zewnętrznej i 2 cm — przy wewnętrznej styczności. Znaleźć promienie tych okręgów.

231. Promienie dwóch okręgów znajdują się w stosunku $5:3$, i przy styczności wewnętrznej odległość pomiędzy ich środkami jest równa 6 jedn. Wskazać odpowiednie położenie tych okręgów, jeżeli odległość pomiędzy ich środkami wynosi: 1) 24 jedn., 2) 5 jedn., 3) 28 jedn., 4) 20 jedn.

232. Odległość najmniejsza pomiędzy dwoma okręgami spółśrodkowemi wynosi 2 cm, a największa—16 cm. Znaleźć promienie tych okręgów.

233. Promienie dwóch okręgów spółśrodkowych znajdują się w stosunku $7:4$, a szerokość pierścienia $= 12$ cm. Znaleźć promień mniejszego okręgu.

234. Wewnątrz okręgu danego znajduje się drugi; promienie tych okręgów są równe: 28 cm i 12 cm, a najmniejsza odległość pomiędzy okręgami wynosi 10 cm. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami tych okręgów.

235. Boki trójkąta są równe 8 dm, 16 dm i 20 dm. Z wierzchołków tego trójkąta opisano 3 okręgi w ten sposób, że każdy z nich jest zewnątrz styczny do dwóch pozostałych. Znaleźć promienie tych okręgów.

236. Dwa koła równe są wewnątrz styczne do trzeciego, oraz stykają się z sobą. Łącząc trzy środki tych kół, otrzymamy obwód, wynoszący 18 cm. Odnaleźć promień większego koła.

237. Dwa okręgi równe są wewnątrz styczne do trzeciego. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami okręgów wewnętrznych, jeżeli ich promień jest równy r, promień większego okręgu $= R$, a jego łuk pomiędzy punktami styczności wynosi 60^0.

238. Dwa okręgi równe przecinają się tak, że ich wspólna styczna zewnętrzna jest równa ich wspólnej cięciwie. Wyznaczyć wielkość łuków wewnętrznych, zawartych pomiędzy punktami przecięcia.

239. Dwa okręgi równe są styczne zewnątrz. $ABCD$ jest ich wspólna sieczna, z jednej strony środków położona, tak iż $AB = BC = CD$. Znaleźć łuk AB.

240*. Wspólna styczna zewnętrzna dwóch okręgów zewnątrz stycznych tworzy z ich wspólną styczną wewnętrzną kąt 60^0. Wyznaczyć stosunek promieni tych okręgów.

241. Wspólna styczna zewnętrzna dwóch okręgów zewnątrz stycznych tworzy z linją środków kąt 30^0. Obliczyć promienie tych kół, jeżeli odległość pomiędzy środkami równa jest 12 cm.

242. W większym z dwóch okręgów spółśrodkowych jest przeprowadzona cięciwa styczna do mniejszego okręgu. Znaleźć promień mniejszego okręgu, jeżeli odcięty łuk zawiera 90^0, a cięciwa jest równa 1 metrowi.

243*. Dwa okręgi równe przecinają się w punktach A i B. Z punktu C jednego okręgu przeprowadzono proste przez punkty A i B do przecięcia się w punktach D i E z drugim okręgiem. Kąt $ACB = 36^0 15'$. Wyznaczyć wielkość łuku DE (nie przechodzącego przez A i B).

244. 1) Dwa okręgi przecinają się. Promienie, poprowadzone do obydwóch punktów przecięcia, tworzą przy jednym środku kąt $= 40^0$, a przy drugim — 100^0. Pod jakim kątem przecinają się okręgi [1])?

2) Dwa okręgi przecinają się pod kątem 60^0; jeden z punktów przecięcia połączono ze środkami obu okręgów i każdy z otrzymanych promieni przeciągnięto aż do przecięcia się z drugim okręgiem. Dowieść, że odległość tak otrzymanych punktów przecięcia jest równa linji środków.

Proporcjonalność prostych. Własności dwusiecznej kąta w trójkącie.

245. Ramiona kąta A przecinają dwie równoległe BC i DE (B i D są to punkty na jednem ramieniu kąta). Wyznaczyć:

1) AE, jeżeli $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm i $AC = 10$ cm;

2) AB, jeżeli $AC = 12$ jedn., $AE = 16$ jedn. i $AB + AD = 21$ jedn.;

3) AD, jeżeli $AC : AE = {}^3/_{11} : 0{,}6$ i $BD = 12$ dm.

246. W trapezie $ABCD$ ramiona AB i CD przedłużono do wzajemnego przecięcia się w punkcie M. Wyznaczyć:

1) CM, jeżeli $AB = 1$ m, $CD = 15$ dm i $BM = 8$ dm;

2) BM, jeżeli $AB = 12$ cm i $CD : CM = 2 : 3$;

3) CD, jeżeli $AB : BM = 17 : 9$ i $CD - CM = 1{,}6$ m.

247. W trójkącie ABC na boku AB odmierzono część BM i poprowadzono prostą MN równolegle do boku AC. Wyznaczyć:

1) BM i BN, jeżeli $AB = 12$ dm, $BC = 28$ dm i $BM + BN = 1$ m;

2) AB, jeżeli $BM = {}^3/_7$, BN i $BC - AB = 2$ m;

3) BM, jeżeli $AM = {}^{15}/_{11}\, CN$ i $BN = 2{,}75$ jedn.;

4) BM, jeżeli $BM = CN$, $AM = 8$ cm i $BN = 18$ cm.

248. BA i BD są to odcinki jednego ramienia kąta B; BC i BE — odcinki drugiego ramienia tegoż kąta. Sprawdzić, czy proste AC i DE są równoległe, jeżeli:

[1]) Kątem przecięcia dwóch okręgów nazywamy kąt pomiędzy stycznemi w punkcie przecięcia.

1) $AB : AD = 3 : 4$, $BC = 12$ cm i $BE = 28$ cm;

2) $BD : AD = 11 : 8{,}5$ i $BC = {}^5/_{17}\, CE$;

3) $AB = {}^7/_{13}\, BD$, $BC = 28$ cm i $CE = 20$ cm.

249. W trapezie $ABCD$ bok AB podzielono na odcinki $AM = 10$ cm i $BM = 12$ cm. Z punktu M wyciągnięto prostą równoległą do podstaw i przecinającą ramię CD trapezu w punkcie N. Odnaleźć CD, jeżeli $CN = 18$ cm.

250. W trójkącie rzuty boków na podstawę są równe 15 cm i 27 cm, a większy bok trójkąta wynosi 45 cm. Na jakie części podzieli ten bok (licząc od wierzchołka) prostopadła, wystawiona ze środka podstawy? (Dwa przypadki w położeniu wysokości).

251. $ABCD$ jest to trapez, w którym $BC \parallel AD$; E i F są punktami na AB i CD, przyczem $BE = {}^3/_7 AB$ i $CF = {}^3/_7 CD$. Przekątna AC, mająca 21 m, przecina prostą EF w punkcie M. Obliczyć AM i MC.

252*. 1) ADB i ACE są to ramiona kąta A. Proste BC i DE przecinają się w punkcie F. Wiadomo, że $AB = a$, $BF : FC = m : n$ i $DF : FE = p : q$. Odnaleźć AD.

2) Z wierzchołka A kąta wyciągnięto prostą nieograniczoną AM; na tej prostej wzięto punkt B w odległości 5 cm od jednego i w odległości 8 cm od drugiego z ramion kąta oraz punkt C, którego odległość od pierwszego ramienia wynosi 10 cm. Znaleźć odległość punktu C od drugiego ramienia kąta (zwrócić uwagę na dwa możliwe położenia prostej AM względem kąta).

3) Dowieść, że geometrycznem miejscem punktów, których odległości od ramion kąta znajdują się w stosunku danym $(m : n)$ jest prosta.

4) Bok BC równoległoboku $ABCD$ podzielono na k części równych i pierwszy z punktów podziału połączono z wierzchołkiem A; tak otrzymana prosta przecina przekątną BD w punkcie E. Obliczyć długość BE, jeżeli $BD = l$.

---

253. BD jest dwusieczną kąta B w trójkącie ABC. Obliczyć:

1) odcinki AD i DC, jeżeli $AB = 10$, $BC = 15$ i $AC = 20$;

2) bok BC, jeżeli $AD : DC = 8 : 5$ i $AB = 16$ dm;

3) bok AC, jeżeli $AB : BC = 2 : 7$ i $DC - AD = 1$ m;

4) boki AB i BC, jeżeli obwód $= 40$ cm, $AD = 9$ cm i $DC = 6$ cm;

5) bok AB, jeżeli $BC = 3^1/_2$ cm i $AD = {}^5/_{12}\, AC$.

254. Dowieść, że w trójkącie odcinki boku, utworzone przez dwusieczną kąta, zawsze są mniejsze od boków przyległych.

255. Kąt trójkąta, zawarty pomiędzy bokami, mającemi odpowiednio 9 cm i 6 cm, podzielono na pół, poczem jeden z odcinków trzeciego boku okazał się równym jednemu z boków danych. Znaleźć trzeci bok trójkąta.

256. BD jest dwusieczną kąta B w trójkącie ABC. Obliczyć:
1) odcinek DC, jeżeli $AB : AD = 2/3 : 0,5$ i $BC = 12$ cm;
2) bok AC, jeżeli $AB + BC = 6$ m i $AD = 4/15\ AB$;
3) bok AB, jeżeli $AB = DC$, $AD = 9$ dm i $BC = 16$ dm;

257. D jest to punkt na boku BC w trójkącie ABC. Sprawdzić, czy prosta AD dzieli kąt A na połowy, jeżeli:
1) $AB = 12$, $AC = 15$, $BD = 8$ i $DC = 10$;
2) $AB = 1,2$ dm, $AC = 5,6$ dm i $BD : DC = 14 : 3$;
3) $AB = 5/11\ AC$, $BD = 2$ m i $DC = 4,5$ m;
4) $AB = 0,5$ jedn., $AC = 2^1/_3$ jedn. i $BD = 3/17\ BC$.

258. W trójkąt ABC jest wpisany romb $ADEF$ w ten sposób, że wierzchołki D, E i F znajdują się odpowiednio na bokach AB, BC i AC. Znaleźć odcinki BE i EC, jeżeli $AB = 14$ cm, $BC = 12$ cm i $AC = 10$ cm.

259. Biorąc rysunek z zadania poprzedniego, wyznaczyć stosunek $AB : AC$ taki, ażeby było $AD = 5/11\ AB$.

260. Boki trójkąta są równe 51 cm, 85 cm i 104 cm. Środek okręgu stycznego do obydwóch boków mniejszych znajduje się na boku większym. Na jakie części dzieli środek okręgu bok większy?

261. W trójkącie równoramiennym wysokość $= 20$; podstawa i ramię są w stosunku $4 : 3$. Wyznaczyć promień koła wpisanego.

262. W trójkącie równoramiennym środek koła wpisanego dzieli wysokość w stosunku $12 : 5$. Ramię trójkąta $= 60$ cm. Znaleźć podstawę.

263. W trójkącie równoramiennym promień koła wpisanego jest równy $2/7$ wysokości, a obwód tego trójkąta $= 56$ cm. Obliczyć jego boki.

264. Cięciwa $AB = 15$, cięciwa $AC = 21$ i cięciwa $BC = 24$. Punkt D jest środkiem łuku BC. Odnaleźć części BE i EC, otrzymane z przecięcia cięciwy BC linją AED.

265. W trójkącie ABC dane są boki a, b i c. BD jest dwusieczną kąta B; O — punkt przecięcia BD i dwusiecznej kąta C. Wyznaczyć stosunek $OD : OB$.

266. W trójkącie ABC bok $AB = 15$ cm i $AC = 10$ cm. AD jest dwusieczną kąta A; $DE \parallel AB$. Znaleźć AE, EC i DE.

267*. W trójkącie równoramiennym ABC bok $AB = BC = a$, bok $AC = b$; AN i CM są dwusiecznemi kątów A i C. Wyznaczyć długość MN.

Podobieństwo trójkątów i wielokątów.

268. Boki trójkąta są równe odpowiednio 12 cm, 16 cm i 24 cm. Największy z boków trójkąta podobnego do danego wynosi 18 cm. Znaleźć dwa boki pozostałe.

269. Stosunek wzajemny boków trójkąta równy jest stosunkowi $4 : 5 : 6$. Najmniejszy z boków trójkąta podobnego do danego jest równy 16 dm. Znaleźć jego boki pozostałe.

270. Boki trójkąta stosują się do siebie, jak $2 : 5 : 4$; obwód trójkąta podobnego wynosi 55 cm. Obliczyć jego boki.

271. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ mamy $\angle A = \angle A_1$ i $\angle B = \angle B_1$. Rozwiązać dla tych trójkątów następujące zadania:
1) dane $a = 10$; $b = 14$; $a_1 = 25$; $c_1 = 20$[1]. Znaleźć c i b_1;
2) „ $a = 35$; $a_1 = 21$; $c - c_1 = 8$. Znaleźć c;
3) „ $a + c = 69$; $a : b = 3 : 4$; $b_1 : c_1 = 6 : 7$. Znaleźć a.

272. W trójkątach ABC i DEF kąt $A = E$ i kąt $B = D$. Bok $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm, $DE = 12$ cm, $AC - EF = 6$ cm. Znaleźć AC, EF i DF.

273. W dwóch trójkątach równoramiennych kąty przy wierzchołku są równe. Ramię i podstawa jednego trójkąta są równe odpowiednio 17 jedn. i 10 jedn., podstawa drugiego trójkąta $= 8$ jedn. Znaleźć jego ramię.

274. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ jest $\angle B = \angle B_1$; boki kąta B są 2,5 raza większe od boków kąta B_1. Znaleźć AC i A_1C_1, jeżeli ich suma wynosi 42 cm.

275. W trójkątach ABC i DEF jest $\angle B = \angle D$, $AB = 4/3\ DE$ i $DF = 0,75\ BC$. Znaleźć AC i EF, jeżeli różnica ich wynosi 5 cm.

276. Sprawdzić, czy trójkąty o następujących bokach są podobne:
1) 12 cm, 18 cm i 24 cm; 10 dm, 15 dm i 20 dm;
2) 1 m, 2 m i 15 dm; 12 dm, 8 dm i 16 dm;
3) 1 jedn., 2 jedn. i $1^1/_4$ jedn.; 10, 9 i 16.

277. 1) W trójkącie ABC bok $AB = 15$ m i $AC = 20$ m; na boku AB odmierzono część $AD = 10$ m, a na boku AC — część $AE = 12$ m. Czy trójkąty ABC i ADE są podobne?

2) Przyjmując w zadaniu poprzedniem $AD = 12$ m i $AE = 9$ m, sprawdzić, czy trójkąty ABC i ADE są podobne?

278. 1) Największe boki dwóch trójkątów są równe odpowiednio 16 cm oraz 20 cm, a odpowiadające im wysokości wynoszą: 12 cm oraz 18 cm. Czy te trójkąty są podobne?

---

[1]) Przypuszczamy, że boki wyrażone są w jednakowych jednostkach.

2) W dwóch trójkątach największe boki mierzą odpowiednio 1 m i 2 m, a odpowiadające im wysokości = 8 dm i 1,6 m. Czy te trójkąty są podobne?

279. AB jest średnica okręgu; AC — cięciwa. Na średnicy $DE = {}^{13}/_{17}\ AB$ opisano drugi okrąg i w nim przeciągnięto cięciwę $DF = {}^{13}/_{17}\ AC$. Znaleźć EF, jeżeli $BC = 34$.

280. 1) Boki jednego trójkąta wynoszą: 12 cm, 24 cm i 30 cm; obwód podobnego do niego trójkąta wynosi 82,5 cm. Obliczyć boki drugiego trójkąta.

2) Obwód jednego trójkąta jest równy ${}^{11}/_{13}$ obwodu drugiego podobnego doń trójkąta. Różnica dwóch boków odpowiednich wynosi 1 m. Znaleźć te boki.

281. Dany jest trójkąt ABC i wewnątrz prosta DE równoległa do AC. Wyznaczyć długość DE, jeżeli:

1) $AC = 20$, $AB = 17$ i $BD = 11{,}9$;

2) $AC = 18$ dm, $AB = 15$ dm i $AD = 1$ m.

282. Dany jest trójkąt ABC i wewnątrz niego prosta DE równoległa do boku AC. Znaleźć:

1) AD, jeżeli $AB = 16$ cm, $AC = 2$ dm i $DE = 15$ cm;

2) stosunek $AD : BD$, jeżeli wiadomo, że $AC : DE = {}^{5}/_{7} : {}^{4}/_{11}$.

283. Podstawa trójkąta równa jest 30 cm, a wysokość — 12 cm. Wyznaczyć długość odcinka prostej, przechodzącej równolegle do podstawy w odległości 2 cm od niej, zawartego pomiędzy bokami.

284. 1) Podstawa i wysokość trójkąta równe są odpowiednio 2 m i 25 dm. Odcinek równoległej do podstawy, zawarty pomiędzy bokami, wynosi 12 dm. Wyznaczyć odległość równoległej od podstawy.

2) Podstawa trójkąta ma 32 cm. Odcinek równoległej do podstawy, oddalony od niej o 9 cm, posiada długość 20 cm. Znaleźć wysokość trójkąta.

285. W trójkącie ABC, którego boki a, b i c są dane, przeprowadzona jest prosta MN, równoległa do AC, w ten sposób, że $AM = BN$. Znaleźć MN.

286. W trójkącie ABC przeprowadzono prostą BD w ten sposób, że $\angle BDC = \angle ABC$; ta prosta odcina od boku AC części $AD = 7$ cm i $DC = 9$ cm. Wyznaczyć bok BC i stosunek $BD : AB$.

287. W trójkącie ABC przeprowadzono prostą BD w ten sposób, że $\angle ABD = \angle BCA$. Znaleźć odcinki AD i DC, jeżeli $AB = 2$ m i $AC = 4$ m.

288. W trójkącie ABC na boku BC odmierzono odcinek CD, równy ${}^{2}/_{5}\ AC$, a na boku AC—odcinek CE, równy ${}^{2}/_{5}\ BC$, i punkty D i E połączono. Należy:

1) znaleźć AB, jeżeli $AB - DE = 12$ cm;

2) dowieść, że w 4-kącie $ABDE$ suma kątów przeciwległych równa się 2 d.

289. Dany jest trójkąt ABC. Na przedłużeniu boku AB odmierzono odcinek $BD = {}^{4}/_{7}\ AB$ i na przedłużeniu boku CB—odcinek $BE = {}^{4}/_{7}\ CB$; punkty D i E połączono. Przez wierzchołek B przechodzi prosta, przecinająca AC w punkcie F, a DE—w punkcie G. Znaleźć BF i BG, jeżeli $FG = 4{,}4$ dm.

290. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $BC \parallel AD$; O jest punktem przecięcia przekątnych; $AO = 8$ cm, $OC = 1$ dm i $BD = 27$ cm. Znaleźć OB i OD.

291. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $BC \parallel AD$; O jest punktem przecięcia przekątnych; $BO : OD = 0{,}3 : {}^{2}/_{3}$; linja środkowa trapezu jest równa 29 cm. Znaleźć podstawy trapezu i stosunek $AO : OC$.

292. W trapezie $ABCD$ (w którym $BC \parallel AD$) przeprowadzono przekątną BD. Kąty ABD i BCD są równe. $BC = 10$, $CD = 15$ i $BD = 20$. Znaleźć AB i AD.

293. W trapezie $ABCD$ przeprowadzono przekątną AC. Kąty ABC i ACD są równe. Znaleźć przekątną AC, jeżeli podstawy BC i AD są odpowiednio równe 12 cm i 27 cm.

294. Podstawy trapezu mają się do siebie, jak 5 : 9, a jeden z boków jest równy 16 dm. O ile należy przedłużyć ten bok, ażeby się spotkał z przedłużeniem drugiego boku?

295. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB = 420$ m. Na boku BC wzięto punkt E taki, że $BE : EC = 5 : 7$, i przeprowadzono prostą DE, która przecina przedłużenie AB w punkcie F. Znaleźć BF.

296. Dany jest równoległobok $ABCD$; F jest punktem na przedłużeniu boku AB; E—punkt przecięcia DF i AC. Znaleźć BF, jeżeli $AE : EC = m : n$ i $AB = a$.

297. Dany jest równoległobok $ABCD$. Przez punkt przecięcia jego przekątnych przeprowadzono prostą prostopadłą do BC, która przecina BC w punkcie E, a przedłużenie AB—w punkcie F. Znaleźć BE, jeżeli $AB = a$, $BC = b$ i $BF = c$.

298. Kąt wpisanego w trójkąt równoległoboku jest również kątem trójkąta. Boki trójkąta, zawierające ten kąt, wynoszą 20 cm i 25 cm, a równoległe do nich boki równoległoboku mają się do siebie, jak 6 : 5. Znaleźć boki równoległoboku.

299. W trójkąt ABC jest wpisany romb $ADEF$ w ten sposób, że kąt A jest ich kątem wspólnym, a wierzchołek E znajduje się na boku BC. Znaleźć bok rombu, jeżeli $AB=c$ i $AC=b$.

300. Prosta, przeprowadzona przez wierzchołek rombu nazewnątrz, odcina na przedłużeniach dwóch boków odcinki p i q. Znaleźć boki rombu.

301. W trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisany jest kwadrat w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie trójkąta, a pozostałe dwa — na jego bokach. Znaleźć bok kwadratu.

302*. W trójkąt, którego podstawa ma 48 cm, a wysokość 16 cm, jest wpisany prostokąt, którego boki są w stosunku $5:9$, przyczem większy bok leży na podstawie trójkąta. Znaleźć boki prostokąta.

303. W trójkąt, którego podstawa jest równa 30, a wysokość — 10 jedn., wpisany jest trójkąt prostokątny równoramienny w ten sposób, że jego przeciwprostokątna jest równoległa do podstawy danego trójkąta, a wierzchołek kąta prostego leży na tej podstawie. Znaleźć przeciwprostokątną.

304. W trójkąt jest wpisane półkole, którego półokrąg jest styczny do podstawy, a średnica, której końce znajdują się na bokach trójkąta, jest równoległa do podstawy. Znaleźć promień, jeżeli podstawa trójkąta jest równa a, wysokość — h.

305. W trójkącie ABC kąt C jest prosty; $AC=6$ cm, $CB=12$ cm. Z punktu A wyprowadzono prostą AD pod kątem $ADC=90^0-B$. Na jakie części ta prosta podzieli CB?

306. W trójkącie ABC dane są dwa boki: $BC=16$ cm i $AC=12$ cm i suma odpowiednich wysokości $AD+BE=14$ cm. Znaleźć AD i BE.

307. 1) Obwód równoległoboku $=2p$, jego wysokości są h_1 i h_2; obliczyć boki.

2) Boki równoległoboku wynoszą 2 m i 16 dm; odległość pomiędzy bokami większemi równa się 8 dm. Wyznaczyć odległość pomiędzy bokami mniejszemi.

308. Obwód równoległoboku jest równy 48 jedn., a jego wysokości mają się do siebie, jak $5:7$. Obliczyć odpowiadające im boki.

309. Znaleźć długość cięciwy, jeżeli jest dany promień r i odległość a jednego końca cięciwy od stycznej, przeprowadzonej przez drugi jej koniec.

310. Dwa okręgi są styczne nazewnątrz. Prosta, przeprowadzona przez punkt styczności, tworzy w okręgach cięciwy, z których jedna równa się $^{13}/_5$ drugiej. Znaleźć promienie tych okręgów, jeżeli odległość pomiędzy ich środkami wynosi 36 cm.

311. Dany jest trójkąt ABC; CD jest dwusieczną kąta C; DE — prosta, przeprowadzona wewnątrz trójkąta równolegle do AC. Znaleźć DE, jeżeli $BC=a$ i $AC=b$.

312. Dany jest trójkąt ABC; BD jest wysokość; AE — dwusieczna kąta A; EF — prostopadła do AC. Znaleźć EF, jeżeli $BD=3$ dm i $AB:AC=7:8$.

313. W równoległobok wpisany jest ukośnik w ten sposób, że jego boki są równoległe do przekątnych równoległoboku. Znaleźć boki ukośnika, jeżeli przekątne równoległoboku są równe l i m.

314*. 1) Dany jest trapez $ABCD$, przyczem $BC \parallel AD$; punkt E dzieli bok AB w stosunku $m:n$ (licząc od A do B); do boku CD przeprowadzono prostą EF równolegle do AD. Znaleźć długość EF, jeżeli $AD=a$ i $BC=b$.

2) W trapezie $ABCD$ jest AD podstawą mniejszą, BC podstawą większą; $AB=a$, $BC=b$ i $AD=d$. Na AB odmierzamy część $AE=m$ i z punktu E przeciągamy $EF \parallel BC$ do przecięcia z CD w punkcie F. Obliczyć trzy odcinki, na jakie przekątne trapezu podzielą prostą EF. Jaką wartość należy nadać odcinkowi m, ażeby odcinek środkowy był równy sumie skrajnych? Jaką wartość powinno mieć m, ażeby EF przeszła przez punkt przecięcia przekątnych.

3) W trapezie zadania poprzedniego odmierzamy na BC część $BE=m$ i z punktu E przeprowadzimy $EF \parallel AB$ do przecięcia z AD w punkcie F. Zakładając, że punkt przecięcia przekątnych leży pomiędzy EF i CD, obliczyć trzy odcinki, na jakie przekątne trapezu podzieliły prostą EF. Jaką wartość powinno mieć m, ażeby odcinek środkowy był równy sumie skrajnych? Przy jakiej wartości m prosta EF przejdzie przez punkt przecięcia przekątnych? Kiedy ten punkt będzie leżał pomiędzy AB i EF?

315. Cztery proste równoległe, których wzajemne odległości kolejne stosują się, jak $2:3:4$, przecięto dwiema nierównoległemi siecznemi. Z czterech otrzymanych odcinków równoległych skrajne równają się odpowiednio 60 dm i 96 dm. Znaleźć odcinki środkowe.

316*. W trójkącie ABC jest przeprowadzona prosta równoległa do boku AC tak, iż jej odcinek wewnętrzny MN jest średnioproporcjonalny pomiędzy odcinkami boku BC. Wyznaczyć długość MN, jeżeli $BC=a$ i $AC=b$.

317. W trójkącie ABC przeprowadzono od AB do BC prostą DE równolegle do AC. Odnaleźć DE, jeżeli $AB=24$ m, $BC=32$ m, $AC=28$ m i $AD+CE=16$ m.

318. AD i BE są wysokości trójkąta ABC, przecinające się w punkcie O. Dane $AD+BE=35$ cm, $AO=9$ cm i $BO=12$ cm. Obliczyć OE i OD.

319. W trójkąt równoramienny, którego ramię ma 1 m, a podstawa $=6$ dm, jest wpisane koło. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami styczności, leżącemi na ramionach trójkąta.

320. Promień wycinka kołowego jest równy r, a cięciwa jego łuku — a. Znaleźć promień koła, wpisanego w ten wycinek.

321. W 4-kącie wpisanym dwa boki przeciwległe a i c są przedłużone do wspólnego przecięcia się. Wyznaczyć długość przedłużonych części boków a i c, jeżeli dwa pozostałe boki 4-kąta są równe b i d, przyczem $b<d$.

322. Boki 5-kąta wynoszą 35 cm, 14 cm, 28 cm, 21 cm i 42 cm. Mniejszy bok podobnego do niego 5-kąta jest równy 12 cm. Znaleźć jego boki pozostałe.

323. Boki jednego 4-kąta mają się do siebie, jak $1:{}^1/_2:{}^2/_3:2$, obwód podobnego do niego 4-kąta równa się 75 m. Znaleźć boki drugiego 4-kąta.

324. Boki jednego 4-kąta równają się 10, 15, 20 i 25, suma zaś największego i najmniejszego z boków podobnego doń 4-kąta jest równa 28. Znaleźć boki drugiego 4-kąta.

325. $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$ są 5-kąty podobne, przyczem A i A_1, B i B_1.... są wierzchołki odpowiednie. Przeprowadzono przekątne AC i AD, A_1C_1 i A_1D_1. Mając $AB=10$ cm, $AC=12$ cm, $AD=14$ cm i $A_1B_1=15$ cm, znaleźć A_1C_1 i A_1D_1.

326. Największe boki dwóch wielokątów podobnych równają się 35 m i 14 m, a różnica obwodów tych wielokątów wynosi 60 m. Obliczyć obwody.

327. W jednym z dwóch 4-kątów podobnych przekątne równają się 16 cm i 24 cm. Znaleźć przekątne drugiego 4-kąta, jeżeli różnica pomiędzy niemi równa się 5 cm.

328. W 4-kącie $ABCD$ przekątna AC została przedłużona na odległość $CC_1={}^3/_7\,AC$. Przeprowadzono: $C_1B_1 \parallel CB$ do przecięcia z przedłużeniem AB i $C_1D_1 \parallel CD$ do przecięcia z przedłużeniem AD. Obliczyć obwód $A_1B_1C_1D_1$, jeżeli obwód $ABCD$ równa się 56 cm.

329. Dwa okręgi są podzielone na części w stosunku jednakowym. Przez połączenie punktów podziału otrzymano wielokąty wpisane. Obwód pierwszego wielokąta wynosi 30 m, a promień pierwszego okręgu $=5$ m. Znaleźć promień drugiego okręgu, jeżeli obwód drugiego wielokąta równa się 24 m.

330. W równoległoboku $ABCD$ jest $AB=a$ i $BC=b$. Prosta EF odcina równoległobok $ABEF$, podobny do $ABCD$. Wyznaczyć odcinek BE.

331. W równoległoboku $ABCD$ jest $AB=a$ i $BC=b$. Prosta EF, równoległa do AB, dzieli dany równoległobok na dwa równoległoboki podobne. Wyznaczyć odcinek BE.

Przedyskutować otrzymane rozwiązanie: kiedy zadanie jest możliwe, kiedy ma jedno, a kiedy dwa rozwiązania?

Zależności liczbowe pomiędzy elementami linjowemi trójkątów i niektórych czworokątów.

1. Trójkąt prostokątny.

Oznaczymy elementy trójkąta w sposób następujący: a i b [1]) — przyprostokątne; c — przeciwprostokątna; p i q — rzuty przyprostokątnych a i b na przeciwprostokątną; h — wysokość, spuszczona z wierzchołka kąta prostego.

332. Znaleźć przeciwprostokątną, jeżeli są dane dwie przyprostokątne:

1) 12 cm i 35 cm; 2) 56 cm i 33 cm;
3) 4 m i 9 dm; 4) 60 i 91; 5) 21 i $3^1/_4$ [1]);
6) ${}^3/_2$ i ${}^7/_{16}$; 7) 16,8 i 2,6; 8) 5 i 6.

333. Znaleźć drugą przyprostokątną, mając przeciwprostokątną i pierwszą przyprostokątną:

1) 289 i 240 [1]); 2) 269 i 69; 3) 145 i 143;
4) 42,5 i 6,5; 5) 17 i 15,4; 6) 10 i 7.

334. Wskazać, przez jakie trzy kolejne liczby całkowite można wyrazić boki trójkąta prostokątnego.

W zadaniach 335 — 343, mając po dwa elementy dane, obliczyć pozostałe (przyjmując oznaczenia z przed № 332).

335. 1) $a=15$; $b=20$. 2) $a=24$; $b=7$. 3) $a=4$; $b=5$.

336. 1) $a=100$; $c=125$. 2) $b=65$; $c=169$. 3) $a=600$; $c=625$.

337. 1) $a=6$; $p=3,6$. 2) $b=7$; $q=1,96$.

338. 1) $c=29$; $p=15^6/_{29}$. 2) $c=3$; $q=2$.

---

[1]) Przypuszczamy, że odcinki są wyrażone zapomocą jednakowych jednostek (lecz nie wymieniono jakich).

Wskazówka. W N-rze 333 i w innych przypadkach podobnych należy przy obliczaniu zamienić różnicę kwadratów na iloczyn sumy przez różnicę.

339. 1) $p=3/2$; $q=8/3$. 2) $p=2$; $q=18$.
340. 1) $a=136$; $h=120$. 2) $b=9$; $h=8^{32}/_{41}$.
341. 1) $p=1{,}75$; $h=6$. 2) $q=1$; $h=2$.
342. 1) $a=45$; $q=48$. 2) $b=5$; $p=2$.
343. 1) $c=12^1/_2$; $h=6$. 2) $c=8$; $h=5$.

344. 1) Przyprostokątne znajdują się w stosunku 5 : 6, a przeciwprostokątna równa się 122 cm. Znaleźć odcinki przeciwprostokątnej (utworzone przez wysokość).

2) Przyprostokątne znajdują się w stosunku 3 : 2, a wysokość dzieli przeciwprostokątną na odcinki, z których jeden jest o 2 m większy od drugiego. Znaleźć przeciwprostokątną.

345. Przyprostokątne znajdują się w stosunku 3 : 7, a wysokość, spuszczona na przeciwprostokątną, równa się 42 dm. Znaleźć odcinki przeciwprostokątnej.

346. $p:q=4:3$; $a^2-b^2=12$. Znaleźć a i b.
347. $a:b=1:2{,}4$; $c=91$. Znaleźć a i b.
348. $a:c=80:89$; $b=117$. Znaleźć a i c.
349. $p:q=1:3$; $a=6$. Znaleźć c.
350. $p:q=4:9$; $h=18$. Znaleźć c.
351. 1) $c+a=49$; $b=35$. Znaleźć c i a.
2) $c-b=2$; $a=5$. Znaleźć c i b.
352. 1) $a+b=71$; $c=61$. Znaleźć a i b.
2) $b-a=79$; $c=101$. Znaleźć a i b.
353. $p-q=32$; $h=30$. Znaleźć p i q.
354*. 1) Dowieść, że $a \cdot b=c \cdot h$.
2) $a+b=70$; $h=24$. Znaleźć c, a i b.
3) $a+b+c=30$; $h=4^8/_{13}$. Znaleźć c, a i b.

355. Dowieść równości $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

---

356. 1) Punkt, znajdujący się wewnątrz kąta prostego, jest oddalony od jego ramion o a i b. Znaleźć jego odległość od wierzchołka kąta prostego.

2) Boki prostokąta są równe 60 cm i 91 cm. Znaleźć jego przekątne.

357. 1) Bok kwadratu równa się a. Znaleźć jego przekątną.

2) Znaleźć bok kwadratu, jeżeli wiadomo, że jest on mniejszy od przekątnej o 2 cm.

358. 1) Boki prostokąta są równe a i b. Znaleźć promień koła opisanego.

2) W koło jest wpisany prostokąt, którego boki znajdują się w stosunku 8 : 15. Obliczyć boki prostokąta, jeżeli promień koła jest równy 3,4 dm.

359. 1) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 8 dm i 18 cm. Obliczyć promień koła opisanego.

2) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 1,6 m i 1,2 m. Obliczyć środkową przeciwprostokątnej.

3) Zadanie № 343 rozwiązać zapomocą środkowej.

4) W koło o promieniu równym 2,5 m wpisano trójkąt prostokątny; znaleźć jego przyprostokątne, wiedząc, że ich długości wyrażają się liczbami całkowitemi.

360. 1) W trójkącie równoramiennym ramię = 17 dm, a podstawa — 15 dm. Obliczyć wysokość.

2) Obliczyć boki trójkąta równoramiennego, jeżeli jego wysokość = 35, a podstawa i ramię mają się do siebie, jak 48 : 25.

3) W trójkącie równoramiennym podstawa = 4 cm, a kąt przy niej równa się 45^0. Obliczyć ramię.

4) W trójkącie równoramiennym ramię = a i kąt przy podstawie = 30^0; znaleźć podstawę trójkąta.

361. 1) Obliczyć wysokość trójkąta równobocznego, mając bok a.

2) W trójkącie równobocznym wysokość jest mniejsza od boku o m jednostek. Obliczyć bok.

3) W trójkącie prostokątnym jeden z kątów równa się 30^0, a większa przyprostokątna równa się 6 dm. Obliczyć dwa pozostałe boki tego trójkąta.

362. 1) Boki trójkąta są równe 25 i 30, a wysokość — 24. Obliczyć podstawę.

2) W trójkącie większy kąt przy podstawie równa się 45^0, a wysokość dzieli podstawę na części równe 20 cm i 21 cm. Obliczyć większy bok.

3) Z danego punktu wyprowadzono do danej prostej prostopadłą i dwie pochyłe. Wyznaczyć długość prostopadłej, jeżeli pochyłe równają się 41 i 50, a ich rzuty na daną prostą znajdują się w stosunku 3 : 10.

363. 1) Przekątne ukośnika są równe 24 cm i 7 dm. Obliczyć jego bok.

2) Znaleźć przekątne ukośnika, wiedząc, że ich stosunek = 3 : 4, a obwód ukośnika wynosi 1 m.

364. 1) W trapezie równoramiennym podstawy są równe 10 cm i 24 cm, a ramię 25 cm. Obliczyć wysokość trapezu.

2) W trapezie równoramiennym ramię = 41 cm, wysokość = = 4 dm i linja środkowa = 45 cm. Obliczyć podstawy.

365. Dowieść, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów przekątnych równa się różnicy kwadratów podstaw.

366. W trapezie prostokątnym mniejsza przekątna równa się bokowi pochyłemu. Obliczyć większą przekątną, jeżeli bok pochyły $= a$, a mniejsza podstawa $= b$.

367. 1) Promień koła równa się 89 dm; cięciwa 16 m. Wyznaczyć jej odległość od środka koła.

2) O jest środkiem koła: ACB — cięciwą; OCD—promieniem prostopadłym do niej. $OC = 13{,}5$ i $CD = 48$. Obliczyć cięciwę.

3) Promienie dwóch przecinających się okręgów wynoszą 13 cm i 15 cm, a ich wspólna cięciwa równa się 24 cm. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami okręgów.

368. 1) Oznaczając przez r promień koła, przedstawić długość cięciwy jako funkcję odległości od środka koła i z otrzymanego wzoru wywnioskować, kiedy cięciwa jest najdłuższa, a kiedy najkrótsza.

2) Cięciwa odcinka kołowego równa się a, a wysokość $= h$. Obliczyć promień koła i przy pomocy otrzymanego wzoru, jak również przy pomocy odpowiednich rysunków, przekonać się: a) że jeżeli odcinki mają wysokości równe, a cięciwy nierówne, to większej cięciwie odpowiada promień większy; b) że jeżeli odcinki mają równe cięciwy, a wysokości nierówne, to mniejszej wysokości odpowiada promień większy. Wziąć parę przykładów z liczbami.

369. Promień koła równa się 25 cm; dwie równoległe cięciwy są równe 14 cm i 40 cm. Wyznaczyć odległość pomiędzy niemi.

370. Odległości jednego końca średnicy od końców równoległej do niej cięciwy równają się 13 cm i 7 cm. Obliczyć promień koła.

371. 1) Do okręgu, którego promień równa się 3,6 dm, wyprowadzona jest styczna z punktu odległego od środka koła o 8,5 dm. Wyznaczyć długość stycznej.

2) Z jednego punktu są wyprowadzone do okręgu dwie styczne. Promień okręgu równa się 11, a suma stycznych = 120. Wyznaczyć odległość tego punktu od środka okręgu.

3) Do okręgu o promieniu $= r$ wyprowadzono dwie styczne z jednego punktu, oddalonego od środka koła o l. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami styczności i przy pomocy otrzymanego wzoru wykazać, że nie może być $l < r$. Co będzie oznaczał przypadek $l = r$ oraz $l > r$? Jak będzie się zmieniała długość cięciwy, łączącej punkty styczności, przy powiększaniu l do nieskończoności?

372. Dwa koła o promieniach R i r są styczne nazewnątrz. Ze środka jednego koła wyprowadzono styczną do drugiego i z otrzymanego punktu styczności wyprowadzono styczną do pierwszego koła. Wyznaczyć długość tej drugiej stycznej.

373. 1) Dwa koła są styczne nazewnątrz. Wyznaczyć długość ich wspólnej stycznej zewnętrznej (pomiędzy punktami styczności), jeżeli promienie kół równają się 16 cm i 25 cm.

2) Promienie dwóch kół równają się R i r, a odległość pomiędzy ich środkami wynosi l. Wyznaczyć długości ich wspólnych stycznych i przy pomocy otrzymanych wzorów, jak również przy pomocy odpowiednich rysunków, zbadać przypadki szczególne: a) $l > r + R$, b) $l = r + R$, c) $R - r < l < r + R$, d) $l = R - r$, e) $l < R - r$. Wziąć odpowiednie przykłady liczebne.

374. 1) Styczna i sieczna, wyprowadzone z jednego punktu do okręgu, są względem siebie prostopadłe. Styczna jest równa 12 m, a część wewnętrzna siecznej — 10 m. Obliczyć promień okręgu.

2) Promień koła = 5; do okręgu przeprowadzono styczną długości m i z końca stycznej wyprowadzono prostopadłą do niej sieczną. Wyznaczyć długość siecznej i przy pomocy otrzymanego wzoru przedyskutować zagadnienie w zależności od zmian odległości m (zob. wskazówkę).

375. AB i CD są to proste równoległe; AC — sieczna; E i F — punkty przecięcia AB i CD z dwusiecznemi kątów C i A, $AF = 96$ cm, $CE = 110$ cm. Znaleźć AC.

376. W trójkącie równoramiennym rozwartokątnym ABC podstawa $AC = 32$ m, a ramię = 20 m. W wierzchołku B wzniesiono prostopadłą do ramienia i przedłużono ją do przecięcia się z podstawą. Na jakie odcinki ta prostopadła dzieli podstawę?

377. W trójkącie ABC kąt C jest prosty; CD — prostopadła do przeciwprostokątnej; DE i DF — prostopadłe do przyprostokątnych AC i BC; $DE = 4$ i $DF = 8$. Obliczyć AC i BC.

378. 1) Przyprostokątna równa się 2 cm, a półokrąg, opisany na niej jako na średnicy, dzieli przeciwprostokątną w stosunku 4 : 5 (licząc od danej przyprostokątnej). Obliczyć przeciwprostokątną.

2) Przeciwprostokątna $= c$; okrąg, zakreślony na jednej z przyprostokątnych jako na średnicy, dzieli przeciwprostokątną w stosunku średnim i skrajnym. Obliczyć przeciwprostokątne.

379. Przyprostokątna $AC = 15$; przyprostokątna $CB = 8$. Ze środka C promieniem CB zakreślamy łuk, odcinający od przeciwprostokątnej część BD, którą należy obliczyć.

380. Obliczyć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, jeżeli łuk, zakreślony z wierzchołka kąta prostego promieniem równym mniejszej przyprostokątnej, dzieli przeciwprostokątną na odcinki 98 cm i 527 cm (licząc od mniejszej przyprostokątnej).

381. AB jest średnica; BC — styczna; D — punkt przecięcia prostej AC z okręgiem. $AD = 3{,}2$ m i $DC = 18$ dm. Obliczyć promień okręgu.

382. AB jest średnica; BC i CDA — styczna i sieczna. Wyznaczyć stosunek $CD : DA$, jeżeli BC równa się promieniowi.

---

383. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku 7 : 9. W jakim stosunku (licząc części w tym samym porządku) podzieli przeciwprostokątną wysokość?

384. Obliczyć przyprostokątne, wiedząc, że dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na części równe 15 cm i 20 cm.

385. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna równa się a. Na jakie części podzieli ją dwusieczna kąta przeciwległego?

386. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przyprostokątną na odcinki m i n ($m > n$). Obliczyć drugą przyprostokątną i przeciwprostokątną.

387. W trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne są równe 15 dm i 2 m, poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego i dwusieczne kątów, utworzonych przez wysokość i przyprostokątne. Obliczyć odcinek przeciwprostokątnej, zawarty pomiędzy dwusiecznemi.

388. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $BC = 6$ i przeciwprostokątna $AB = 10$. Przeprowadzono dwusieczne kąta ABC i kąta doń przyległego, przecinające przyprostokątną AC i jej przedłużenie w punktach D i E. Wyznaczyć długość DE.

389. W trójkącie równoramiennym ABC jest $AB = BC = 10$ m i $AC = 12$ m. Dwusieczne kątów A i C przecinają się w punkcie D. Znaleźć BD.

390. 1) W trójkącie równoramiennym podstawa $= 30$ cm, ramię $= 39$ cm. Obliczyć promień koła wpisanego.

2) W trójkącie równoramiennym środek koła wpisanego dzieli wysokość w stosunku 17 : 15. Znaleźć promień tego koła, jeżeli podstawa trójkąta równa się 6 dm.

---

391. Z punktu B wyprowadzono do danej prostej prostopadłą BC i pochyłą BA. Na AC wzięto punkt D i prostą BD przedłużono do przecięcia w punkcie E z prostą AE, prostopadłą do AC. Znaleźć AE, jeżeli $BA = 53$, $AD = 8$ i $DC = 20$.

392. 1) W trójkącie równoramiennym podstawa $= 3$ dm, a wysokość $= 2$ dm. Obliczyć wysokość, spuszczoną na ramię trójkąta.

2) W trójkącie równoramiennym wysokość, przechodząca pomiędzy ramionami trójkąta, równa się 3 cm, a wysokość, spuszczona na ramię trójkąta, równa się 4 cm. Obliczyć boki tego trójkąta.

3) Przekątne ukośnika równają się 14 i 48. Znaleźć jego wysokość.

393. 1) Przeciwprostokątna $AB = 3{,}4$ m; przyprostokątna $BC = 1{,}6$ m. Wyznaczyć długość prostopadłej, wzniesionej w środku przeciwprostokątnej do przecięcia z przyprostokątną AC.

2) Promień koła równa się r. Wyznaczyć długość cięciwy, wyprowadzonej z końca średnicy przez środek prostopadłego do tej średnicy promienia.

3) Promień koła $= r$; AB jest średnica koła, O — środek, OC — promień (przyczem punkt C leży bliżej B niż A); $OD = p$ jest rzutem promienia na średnicę i AE — cięciwa, przeciągnięta przez środek promienia OC. Wyrazić cięciwę AE jako funkcję promienia r i rzutu p. Przedyskutować zagadnienie, zmieniając p od r do O i od O do $-r$ (dlaczego można tutaj rzutowi p dawać wartości ujemne?) i kreśląc odpowiednie rysunki.

394. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $AC = 16$ cm i przyprostokątna $BC = 12$ cm. Z wierzchołka B promieniem BC kreślimy okrąg i prowadzimy styczną równoległą do przeciwprostokątnej (przyczem styczna i trójkąt znajdują się z różnych stron przeciwprostokątnej). Przyprostokątną BC przedłużamy do przecięcia z nakreśloną styczną. Wyznaczyć długość przedłużenia przyprostokątnej.

395. 1) Z jednego punktu wyprowadzone są dwie styczne do okręgu. Długość stycznej równa się 156, a odległość pomiędzy punktami styczności wynosi 120. Obliczyć promień okręgu.

2) Z jednego punktu wychodzą dwie styczne do okręgu. Promień $= r$, długość stycznej $= a$. Przedstawić cięciwę, łączącą punkty styczności, jako funkcję r i a i przedyskutować zagadnienie, zmieniając a od r do 0 i od r do ∞. Kiedy szukana cięciwa będzie miała długość promienia?

396*. W trapezie prostokątnym podstawy równają się 17 cm i 25 cm, a bok pochyły $= 1$ dm. W środku tego boku wzniesiono prostopadłą do niego i poprowadzono ją do przecięcia z przedłużeniem drugiego boku. Wyznaczyć długość tej prostopadłej.

---

397. AC i CB są przyprostokątne, CD—wysokość; $DE \parallel BC$. Wyznaczyć stosunek $AE : EC$, jeżeli $AC : CB = 4 : 5$.

398. AC i CB są przyprostokątne, CD—wysokość; $DE \perp AC$ i $DF \perp CB$. Obliczyć DE i DF, jeżeli $AC = {}^3/_4$ m i $BC = 1$ m.

399. W dwóch trójkątach równoramiennych ramiona mają jednakową długość, a suma kątów przy wierzchołku wynosi 180^0. Znaleźć podstawy, jeżeli ich stosunek $= 9 : 40$, a długość ramienia wynosi 4,1 dm.

400. 1) W trójkącie podstawa $= 60$ m, wysokość $= 12$ m i środkowa podstawy $= 13$ m. Obliczyć boki.

2) W trójkącie prostokątnym wyznaczyć stosunek przyprostokątnych, jeżeli wysokość i środkowa, wyprowadzone z wierzchołka kąta prostego, tak się mają do siebie, jak 40 : 41.

401. Na bokach kwadratu $ABCD$ odmierzono w jednym kierunku odcinki AE, BF, CG i DH, równe ćwierci boku, i przeprowadzono linje AG, BH, CE i DF, które, przecinając się, tworzą nowy kwadrat. Znaleźć jego bok, jeżeli bok kwadratu danego równa się a.

402. Wewnątrz kwadratu wyprowadzamy z jego wierzchołków 4 proste, każdą pod kątem 30^0 do odpowiedniego boku. Znaleźć bok powstałego przytem nowego kwadratu, jeżeli bok kwadratu danego równa się a.

403. Boki prostokąta równają się a i b $(a > b)$. Znaleźć bok kwadratu, utworzonego przez dwusieczne kątów prostokąta. Rozróżnić trzy przypadki: a) gdy jest $b < \frac{a}{2}$, b) gdy jest $b = \frac{a}{2}$, c) gdy jest $b > \frac{a}{2}$; sprawdzić, że otrzymany wzór jest słuszny dla nich wszystkich.

404. 1) Cięciwa $AB = 12$, cięciwa $CD = 35$, suma łuków AB i CD wynosi 180^0. Obliczyć promień koła.

2) Cięciwa $AB = 2a$, cięciwa $CD = 2b$ (przyczem jest $a < b$); stosunek wzajemny odległości tych cięciw od środka koła wynosi k. Znaleźć promień koła. Przy pomocy otrzymanego wzoru wykazać, że powinno być $k > 1$, jeżeli k jest stosunkiem odległości pierwszej cięciwy do odległości drugiej i naodwrót. Co nam wykaże badanie wzoru, jeżeli założymy, że k, zmniejszając się, dąży do 1?

405*. Dowieść następującego twierdzenia: jeżeli dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła, tworząc kąt prosty, to suma kwadratów czterech ich odcinków równa się kwadratowi średnicy.

406. Znaleźć promień koła, opisanego na trójkącie równoramiennym, jeżeli podstawa i bok tego trójkąta równają się odpowiednio: 1) 6 cm i 5 cm; 2) 24 m i 13 m.

407. Przekątne ukośnika równają się 14 m i 48 m. Znaleźć promień wpisanego weń koła.

408*. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne równają się 13 i 84. Obliczyć promień koła wpisanego.

409. Odległość pomiędzy środkami dwóch okręgów, znajdujących się jeden nazewnątrz drugiego, jest równa 65 dm; długość ich wspólnej stycznej zewnętrznej (między punktami styczności) jest równa 63 dm; długość wspólnej stycznej wewnętrznej wynosi 25 dm. Obliczyć promienie okręgów (zob. zad. № 373, 3).

410*. Długości dwóch cięciw równoległych są równe 40 cm i 48 cm, a odległość pomiędzy niemi wynosi 22 cm. Obliczyć promień koła.

411*. W trapezie równoramiennym podstawy równają się 40 i 30, a ramię jest równe 13. Obliczyć promień koła, opisanego na tym trapezie.

412. W trapezie równoramiennym, opisanym na kole, podstawy równają się 36 cm i 100 cm. Obliczyć promień koła.

413. Na kole, którego promień równa się 12 cm, opisany jest trapez równoramienny, którego ramię wynosi 25 cm. Obliczyć podstawy tego trapezu.

414. Na kole o promieniu r opisany jest trapez równoramienny, którego boki równoległe mają się do siebie, jak $m : n$. Obliczyć wszystkie boki tego trapezu.

415. Z punktu A wychodzą dwie styczne do jednego koła; z tego punktu wyprowadzono prostą AO, łączącą go ze środkiem koła O, i przez punkt M przecięcia tej prostej z okręgiem prze-

ciągnięto styczną. Wyznaczyć długość odcinka tej stycznej, zawartego pomiędzy dwiema stycznemi powyższemi, jeżeli promień koła = 15 dm, a odcinek $AO = 39$ dm.

416. Przyprostokątne równają się 15 i 20. Wyznaczyć odległość od środka koła wpisanego do wysokości, spuszczonej na przeciwprostokątną.

417. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego C spuszczono prostopadłą na przeciwprostokątną i na tej prostopadłej, jako na średnicy, opisano okrąg, który od przyprostokątnych CA i CB odcina części (wewnętrzne) m i n. Obliczyć przyprostokątne ($m = 12$, $n = 18$).

418. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna $BC = a$; na niej bierzemy część $CD = b$, a na przeciwprostokątnej AB obieramy punkt E, jednakowo oddalony od punktu D i od przyprostokątnej AC. Wyznaczyć długość ED.

419. W dwa przeciwległe kąty prostokąta wpisane są równe łuki, stykające się z sobą. Obliczyć promienie tych łuków, jeżeli boki prostokąta równają się a i b.

420. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne równają się $^3/_4$ m i 1 m. Na odcinkach przeciwprostokątnej, utworzonych przez wysokość, nakreślono półkola z tej samej strony przeciwprostokątnej, z której znajduje się i dany trójkąt. Obliczyć odcinki przyprostokątnych, zawarte wewnątrz tych półkoli.

421*. Dowieść, że przy styczności zewnętrznej dwóch kół ich wspólna styczna jest średnią proporcjonalną pomiędzy ich średnicami.

422. W trójkącie równoramiennym promień koła wpisanego tak się ma do promienia koła zawpisanego przy podstawie, jak 4 : 9; podstawa = 60 cm. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami kół wspomnianych.

423. W trapezie $ABCD$ przekątna mniejsza BD jest prostopadła do podstaw AD i BC; suma kątów ostrych A i C równa się 90^0. Podstawa $AD = a$ i $BC = b$. Znaleźć boki AB i CD.

2. Trójkąt ukośnokątny.

424. Znaleźć bok trójkąta, jeżeli jego bok drugi, podstawa i rzut boku szukanego na podstawę są dane odpowiednio przez liczby następujące: 1) 6; 5; 3,8. 2) 2; 3; 2. 3) 12; 8; 11. 4) 2; 2; 3.

425. Określić kształt trójkąta (w zależności od kątów), jeżeli są dane trzy boki, albo ich stosunek: 1) 2; 3; 4. 2) 3; 4; 5. 3) 4; 5; 6. 4) 10; 15; 18. 5) 68; 119; 170.

426*. 1) Dwa boki trójkąta równają się 3 cm i 5 cm. Przez jaką całkowitą liczbę cm można wyrazić bok trzeci, jeżeli naprzeciwko niego powinien się znajdować kąt ostry?

2) Dwa boki trójkąta równają się 3 cm i 5 cm. Przez jaką całkowitą liczbę cm można wyrazić bok trzeci, jeżeli naprzeciwko niego powinien się znajdować kąt rozwarty?

3) Przez jakie trzy kolejne liczby całkowite można wyrazić boki trójkąta rozwartokątnego?

427. W trójkącie ABC b jest podstawa; a i c są boki; p i q— ich rzuty na podstawę; h — wysokość. Znaleźć p, q i h, jeżeli dane są trzy boki:

1) $a = 13$; $b = 14$; $c = 15$. 2) $a = 37$; $b = 30$; $c = 13$.
3) $a = 25$; $b = 12$; $c = 17$. 4) $a = 2$; $b = 4$; $c = 3$.

428*. 1) Mamy trzy boki trójkąta: $AB = 8$, $BC = 10$ i $AC = 12$. Bok AC jest zarazem średnicą półokręgu, przecinającego boki AB i BC[1]) w punktach D i E. Wyznaczyć długości odcinków wewnętrznych AD i CE.

2) Dane są boki trójkąta ABC: $AB = 8$ cm; $BC = 6$ cm i $AC = 4$ cm; na boku AC, jako na średnicy, opisany jest półokrąg z tej samej strony AC, z której znajduje się trójkąt ABC. Należy: 1) dowieść, że bok BC znajduje się poza półkolem, a bok AB będzie podzielony na dwie części; 2) obliczyć część zewnętrzną boku AB.

429. Obliczyć bok w trójkącie, jeżeli dwa boki pozostałe tworzą kąt $= 60^0$ i równają się odpowiednio: 1) 5 cm i 8 cm; 2) 8 m i 15 m; 4) 63 i 80 jednostkom długości.

430. Obliczyć bok trójkąta, jeżeli dwa boki pozostałe tworzą kąt $= 120^0$ i równają się odpowiednio: 1) 3 cm i 5 cm; 2) 7 dm i 8 dm; 3) 11 i 24 jedn.

431. Odnaleźć bok trójkąta, jeżeli dwa boki pozostałe tworzą kąt $= 45^0$ i odpowiednio są równe: 1) 2 i 3; 2) $\sqrt{18}$ i 7.

432. Dwa boki trójkąta są równe a i b, a wysokość dzieli podstawę w stosunku $m : n$. Obliczyć podstawę. (Przykłady: 1) $a = 10$, $b = 17$, $m = 2$, $n = 5$; 2) $a = 21$, $b = 9$, $m = 7$, $n = 3$).

433. Obliczyć boki trójkąta, które wyrażają się przez trzy kolejne liczby całkowite, jeżeli przytem rzut największego boku na średni równa się 9 jednostkom.

[1]) W jaki sposób można się przekonać, czy takie przypuszczenie odpowiada liczbom danym (t. j. czy nie będzie np. AB lub BC poza półkolem? lub też czy wierzchołek B nie znajduje się wewnątrz półkola?).

434. Jeden bok trójkąta równa się 21 cm, a dwa boki pozostałe, tworząc kąt $=60^0$, tak się mają do siebie, jak 3 : 8. Znaleźć te boki.

435. Bok trójkąta, równy 8 dm, tworzy z podstawą kąt $=$ $=60^0$; drugi bok trójkąta ma 7 dm. Obliczyć podstawę.

436. Podstawa trójkąta jest równa 13; kąt przy wierzchołku $=60^0$; suma boków pozostałych wynosi 22. Obliczyć boki i wysokość.

437. W trójkącie podstawa równa się 12 cm; jeden z kątów przy niej jest równy 120^0; bok naprzeciwko tego kąta równa się 28 cm. Znaleźć bok trzeci.

438. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC przeciwprostokątną AB przedłużono o $BD=BC$ i punkt D połączono z C. Obliczyć boki trójkąta ADC, jeżeli przyprostokątna $BC=a$.

439. Obliczyć cięciwę połowy łuku, jeżeli cięciwa całego łuku$=a$ i promień $=r$. (Przykłady: 1) $r=25$, $a=48$; 2) $a=2r$).

440. Dowieść, że w każdym trójkącie różnica kwadratów boków równa się podwojonemu iloczynowi z podstawy przez odcinek, zawarty pomiędzy środkiem podstawy a wysokością.

441. 1) W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $AC=15$ cm i przyprostokątna $BC=20$ cm. Na przeciwprostokątnej AB odmierzono część $AD=4$ cm i punkt D połączono z C. Wyznaczyć długość CD.

2) Trójkąt ABC posiada kąt prosty C. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB odmierzono odcinek BD, równy przyprostokątnej BC, i punkt D połączono z C. Wyznaczyć długość CD, jeżeli $BC=7$, $AC=24$.

442. Trójkąt prostokątny ABC i kąt prosty ABD znajdują się z różnych stron przeciwprostokątnej AB. Odcinek BD jest równy przeciwprostokątnej; punkt D jest połączony z C. Wyznaczyć długość CD, jeżeli $BC=a$ i $AC=b$.

443. W trójkącie ABC mamy punkt D na boku AB. Wyznaczyć długość CD, jeżeli $a=37$, $b=15$, $c=44$ i $AD=14$.

444. W trójkącie rozwartokątnym bok największy $=1{,}6$ m, a wysokości, wyprowadzone z obydwóch jego końców, są oddalone od wierzchołka kąta rozwartego o 2 dm i 3 dm. Obliczyć dwa mniejsze boki trójkąta.

445. Boki trójkąta równoramiennego są: $AB=BC=50$ cm i $AC=60$ cm. Spuszczono wysokości AE i CD i punkty D i E połączono. Obliczyć boki trójkąta DBE.

446*. W wierzchołku C trójkąta ABC wzniesiono prostopadłą do boku AC i przedłużono ją do przecięcia z przedłużeniem boku AB w punkcie D. Obliczyć BD i CD, jeżeli $AB=45$, $BC=39$ i $AC=42$.

447*. W trójkącie ABC dane są boki: $AB=15$, $AC=14$ i $BC=13$. Dwusieczna kąta B jest przedłużona za jego wierzchołek do przecięcia w punkcie E z prostopadłą do AC, wyprowadzoną z punktu C. Wyznaczyć długość CE.

448*. W trójkącie ABC dane są boki: $AB=13$, $AC=14$, $BC=15$. Na boku AC wzięto punkt D taki, że wzniesiona w nim prostopadła ma wewnątrz trójkąta ABC długość równą AD. Obliczyć odcinek AD.

3. Równoległobok i trapez.

449. 1) Boki równoległoboku równają się 23 cm i 11 cm, a przekątne mają się do siebie, jak 2 : 3. Znaleźć przekątne.

2) Przekątne równoległoboku równają się 17 m i 19 m, a boki mają się do siebie, jak 2 : 3. Znaleźć boki.

450. 1) Przekątne równoległoboku są równe 12 cm i 14 cm, a różnica boków równa się 4 cm. Znaleźć boki.

2) Obliczyć boki i przekątne równoległoboku, jeżeli większy bok równa się mniejszej przekątnej, różnica boków równa się 3 jedn. i różnica przekątnych równa się 2 jedn.

451. Znaleźć wysokość równoległoboku, którego podstawa jest równa 51 cm, a przekątne 40 cm i 74 cm.

452. Obliczyć przekątne w trapezie równoramiennym: 1) jeżeli podstawy równają się 4 dm i 6 dm, a bok równa się 5 dm; 2) jeżeli jeden bok równa się 5, a każdy z trzech pozostałych równa się 4.

453. Znaleźć wysokość i przekątne trapezu, jeżeli podstawy a i c oraz boki b i d są dane w liczbach następujących:

$a=25$; $b=13$; $c=11$; $d=15$.
$a=28$; $b=25$; $c=16$; $d=17$.
$a=6$; $b=3$; $c=1$; $d=4$.

454. W trójkąt jest wpisany równoległobok w ten sposób, że jeden z jego boków leży na podstawie trójkąta, a przekątne są równoległe do odpowiednich boków trójkąta. Obliczyć boki równoległoboku, jeżeli podstawa w trójkącie równa się 45 dm, a boki — 39 dm i 48 dm.

455. Dowieść, że w trapezie równoramiennym kwadrat przekątnej jest równy kwadratowi ramienia więcej iloczyn z podstaw.

456. Dowieść, że w każdym trapezie suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów boków więcej podwojony iloczyn z podstaw.

457*. Dowieść, że w każdym 4-kącie suma kwadratów przekątnych jest dwa razy większa od sumy kwadratów prostych, łączących środki boków przeciwległych.

4. Czworokąt wpisany.

(Zastosowanie twierdzenia Ptolemeusza).

458. Punkt okręgu jest połączony z wierzchołkami wpisanego weń trójkąta równobocznego. Dowieść, że środkowa z pośród tych łącznie równa się sumie dwóch pozostałych.

459. Obliczyć przekątną trapezu równoramiennego: 1) jeżeli podstawy równają się 3 cm i 5 cm, a ramię $=7$ cm; 2) jeżeli trzy boki mają po 25 m, a czwarty — 11 m.

460. W trapezie równoramiennym ramię $=45$ cm, a przekątne dzielą się wzajemnie na odcinki: 27 cm i 48 cm. Znaleźć podstawy tego trapezu.

461. Do okręgu, którego promień równa się 44 cm, wyprowadzono dwie styczne z punktu, oddalonego od środka o 125 cm. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami styczności.

462. W 4-kącie $ABCD$ kąty ABC i ADC są proste; $AB=84$ cm, $AC=85$ cm i $AD=75$ cm. Obliczyć przekątną BD.

463. W 4-kącie $ABCD$ przekątne AC i BD są odpowiednio prostopadłe do boków CD i AB; $AB=33$, $CD=25$ i $AD=65$. Znaleźć bok BC.

464*. W kole, którego promień jest równy 25 dm, wyprowadzono dwie cięciwy z jednego punktu: $AB=14$ dm i $AC=40$ dm. Wyznaczyć odległość BC. (Dwa przypadki).

465*. Cięciwa AD dzieli na połowy kąt CAB pomiędzy średnicą AB i cięciwą AC. Wyznaczyć długość AD, jeżeli $AB=8$ cm i $AC=1$ cm.

466. 1) Dane są dwa okręgi współśrodkowe; promień większego z nich jest równy 24 jedn. Z punktu A, oddalonego od środka O o 25 jedn., wyprowadzono z jednej strony środka dwie styczne: AB — do okręgu większego i AC — do mniejszego. Obliczyć promień okręgu mniejszego, jeżeli styczna AC dzieli kąt OAB na połowy.

2) Dane są dwa okręgi współśrodkowe, których promienie są R i r; punkt O jest środkiem. Z końca A prostej $OA > R$ wyprowadzamy styczne do obu okręgów; jedna z tych stycznych równa się r. Znaleźć drugą i wyznaczyć odległość pomiędzy punktami styczności w przypadku, gdy obie styczne leżą po jednej stronie prostej OA, oraz w przypadku, gdy one leżą po obu stronach tej prostej.

467. W 4-kącie $ABCD$ jest $\angle ABC=120^0$, $\angle ADC=60^0$, $AB=AD=3$ cm, $AC=7$ cm. Obliczyć przekątną BD.

468. W 4-kącie $ABCD$, o przekątnych AC i BD, $\angle ABD = \angle ACD=120^0$; $AB=16$, $CD=21$ i $AD=49$. Znaleźć BC.

Linje proporcjonalne w kole.

469. 1) Z punktu okręgu spuszczono prostopadłą na średnicę. Obliczyć średnicę koła, mając następujące długości jej odcinków: 1) 12 i 3; 2) 1,6 m i 9 dm; 3) 2 m i 5 dm.

2) W punkcie średnicy wzniesiono prostopadłą do przecięcia z okręgiem. Wyznaczyć długość tej prostopadłej, jeżeli średnica równa się 40 cm, a prostopadła jest oddalona od jednego z końców średnicy o 8 cm.

3) AB jest prostopadła, spuszczona z punktu okręgu na średnicę; odległość jej spodka od lewego końca średnicy jest z. Wyrazić AB jako funkcję z i, zmieniając z, zbadać zmiany AB.

470. Średnica AB jest podzielona na odcinki: $AC=8$ dm i $CB=5$ m, i w punkcie C wzniesiona prostopadła CD, której długość jest wiadoma. Wyznaczyć położenie punktu D względem okręgu, gdy CD wynosi: 1) 14 dm, 2) 2 m, 3) 23 dm.

471. ACB jest to półokrąg; CD—prostopadła do średnicy AB. Należy:

1) Obliczyć DB, jeżeli $AD=25$ i $CD=10$.
2) „ AB, „ $AD:DB=4:9$ i $CD=30$.
3) „ AD, „ $CD=3\,AD$, a promień $=r$.
4) „ AD, „ $AB=50$ i $CD=15$.

472. 1) Prostopadła, spuszczona z punktu okręgu na promień, dzieli go w stosunku $8:9$ (licząc od środka). Wyznaczyć długość prostopadłej, jeżeli promień $=34$ cm.

2) Cięciwa BDC jest prostopadła do promienia ODA. Obliczyć BC, jeżeli $OA=25$ cm i $AD=10$ cm.

3) Szerokość pierścienia spółśrodkowego równa się 8 dm, cięciwa okręgu większego, będąca zarazem styczną do mniejszego, równa się 4 m. Znaleźć promienie okręgów.

4) Szerokość pierścienia spółśrodkowego jest z, promień okręgu większego R. Wewnątrz pierścienia przeciągnięto styczną AB. Przedstawić AB jako funkcję z. Zmieniając z od o do R, zbadać zmiany AB.

473. Zapomocą porównania odcinków dowieść, że średnia arytmetyczna dwóch liczb (nierównych) jest większa od średniej geometrycznej tych liczb.

474. ADB jest średnica; AC — cięciwa, CD — prostopadła do średnicy. Obliczyć cięciwę AC: 1) jeżeli $AB=32$ cm i $AD=8$ cm; 2) jeżeli $AD=4$ i $DB=5$; 3) jeżeli $AB=20$ m i $DB=15$ m.

475. AB jest średnica; AC—cięciwa; AD—jej rzut na średnicę AB. Należy:

1) Obliczyć AD, jeżeli $AB=18$ i $AC=12$;

2) Obliczyć promień, jeżeli $AC=12$ m i $AD=4$ m;

3) Obliczyć DB, jeżeli $AC=24$, $DB={}^7/_9\,AD$.

476. AB jest średnica; AC — cięciwa; AD jej rzut na średnicę AB. Należy:

1) Obliczyć AC, jeżeli $AB=35$ cm i $AC=5\,AD$.

2) Obliczyć AC, jeżeli promień $=r$ i $AC=DB$.

477. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła. Odcinki jednej cięciwy są: 24 cm i 14 cm, a jeden z odcinków drugiej cięciwy równa się 28 cm. Znaleźć drugi jej odcinek.

478. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie M tak, że $MA=7$, $MB=21$, $MC=3$ i $MD=16$. Sprawdzić, czy punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu?

479. Cięciwa AMB została obrócona dokoła punktu M tak, że odcinek MA powiększył się $2^1/_2$ razy. Jak zmienił się odcinek MB?

480. 1) Z dwóch przecinających się cięciw jedna jest podzielona na części: 48 cm i 3 cm, a druga — na połowy. Wyznaczyć długość drugiej cięciwy.

2) Z dwóch przecinających się cięciw jedna jest podzielona na części: 12 m i 18 m, a druga — w stosunku 3 : 8. Wyznaczyć długość drugiej cięciwy.

481. Jedna z dwóch przecinających się cięciw równa się 32 dm, a odcinki drugiej równają się 12 dm i 16 dm. Obliczyć odcinki pierwszej cięciwy.

482. 1) Sieczną ABC obrócono dokoła punktu zewnętrznego A tak, że odcinek AB zmniejszył się 3 razy. Jak zmieniła się długość siecznej?

2) W kole dana jest cięciwa długości $2a$, na niej dany jest punkt w odległości z od jednego końca cięciwy. Znaleźć potęgę tego punktu. Jak zmienia się ta potęga, gdy punkt wędruje po cięciwie, t. j. gdy zmienia się z? Kiedy potęga będzie największa? Jakich wartości z nie może przekroczyć?

483. Dwie proste ADB i AEC przecinają okrąg: pierwsza — w punktach D i B, druga — w punktach E i C. Należy:

1) Obliczyć AE, jeżeli $AD=5$ cm, $DB=15$ cm i $AC=25$ cm.

2) Obliczyć BD, jeżeli $AB=24$, $AC=16$ i $EC=10$.

3) Obliczyć AB i AC, jeżeli ich suma$=50$ m, a $AD:AE=3:7$.

484. 1) Promień okręgu równa się 7 jedn. Z punktu, oddalonego od środka o 9 jedn., wyprowadzono sieczną w ten sposób, że okrąg dzieli ją na połowy. Wyznaczyć długość tej siecznej.

2) Promień okręgu $=7$ cm. Z punktu, oddalonego od środka o z, wyprowadzono sieczną długości 8 cm. Wyznaczyć stosunek siecznej do jej odcinka zewnętrznego jako funkcję z. W jakich granicach możemy zmieniać odległość z, by otrzymany stosunek przy tych zmianach zawsze spełniał warunki zadania? Przy jakiej wartości z część zewnętrzna siecznej będzie równa $^1/_2$ siecznej, $^1/_4$ siecznej i t. p.?

485. MAB i MCD są dwie sieczne jednego okręgu. Należy:

1) Obliczyć CD, jeżeli $MB=1$ m, $MD=15$ dm i $CD=MA$.

2) Obliczyć MD, jeżeli $MA=0{,}75$ jedn., $AB=0{,}5$ jedn. i $MC:CD=5:7$.

3) Obliczyć AB, jeżeli $AB=MC$, $MA=20$ i $CD=11$.

486. Dwie cięciwy są przedłużone do wzajemnego przecięcia się. Wyznaczyć długości otrzymanych przedłużeń, jeżeli długości cięciw wynoszą a i b, a ich przedłużenia mają się do siebie, jak $m:n$.

487. Z jednego punktu wyprowadzono do okręgu sieczną i styczną. Wyznaczyć długość stycznej, jeżeli zewnętrzny i wewnętrzny odcinek siecznej wyrażają się odpowiednio w liczbach następujących: 1) 4 i 5; 2) 2,25 i 1,75; 3) 1 i 2.

488. Styczna równa się 20 cm, a największa sieczna, wyprowadzona z tego samego punktu, wynosi 50 cm. Znaleźć promień koła.

489. 1) Sieczna jest większa od swego odcinka zewnętrznego $2^1/_4$ raza. Ile razy jest ona większa od stycznej, wyprowadzonej z tego samego punktu?

2) Stosunek siecznej do stycznej, wychodzącej z tego samego punktu, wynosi k. Jaki jest stosunek siecznej do jej części zewnętrznej?

490. Wspólna cięciwa dwóch przecinających się okręgów została przedłużona; z punktu, wziętego na tem przedłużeniu, wyprowadzono do obydwóch okręgów styczne. Dowieść, że te styczne są równe.

491. 1) Z punktu A wychodzą dwie sieczne do okręgu. Odcinek zewnętrzny 1-ej siecznej jest a, jej odcinek wewnętrzny $= b$; odcinek zewnętrzny drugiej siecznej jest c, znaleźć jej odcinek wewnętrzny. Na podstawie otrzymanego wzoru orzec, kiedy druga sieczna będzie styczną, kiedy odcinek c będzie istotnie częścią zewnętrzną siecznej, a kiedy trzeba go będzie uważać za całą sieczną?

2) Na jednem ramieniu kąta A odmierzono jeden po drugim odcinki: $AB = 6$ i $BC = 8$; na drugiem ramieniu odmierzono odcinek $AD = 10$. Przez punkty B, C i D przeprowadzono okrąg. Sprawdzić, czy prosta AD styka się z tym okręgiem, a jeżeli nie, to czy punkt D będzie pierwszym (licząc od A), czy też drugim punktem przecięcia.

492. AB jest styczna, a ACD — sieczna do jednego okręgu. Należy:

1) Znaleźć CD, jeżeli $AB = 2$ i $AD = 4$.

2) Znaleźć AD, jeżeli $AC : CD = 4 : 5$ i $AB = 12$ cm.

3) Znaleźć AB, jeżeli $AB = CD$ i $AC = a$.

493. 1) Styczna i sieczna, wyprowadzone z jednego punktu, równają się odpowiednio 2 dm i 4 dm; przyczem sieczna oddalona jest od środka o 8 cm. Znaleźć promień koła.

2) Wyznaczyć odległość od środka koła do punktu, z którego wychodzą styczna i sieczna, równające się odpowiednio 4 cm i 8 cm, jeżeli sieczna jest oddalona od środka koła o 12 cm.

494. 1) Ze wspólnego punktu wyprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Wyznaczyć długość stycznej, jeżeli ona jest większa o 5 cm od zewnętrznego odcinka siecznej i o tyleż mniejsza od jej odcinka wewnętrznego.

2) Z jednego punktu wyprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Sieczna równa się a, a jej odcinek wewnętrzny jest większy od odcinka zewnętrznego o długość stycznej. Znaleźć styczną.

495. Z jednego punktu wyprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Styczna jest większa od wewnętrznego i zewnętrznego odcinka siecznej odpowiednio o 2 jedn. i 4 jedn. Znaleźć długość siecznej.

496. Z jednego punktu wyprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Wyznaczyć ich długości, jeżeli styczna jest mniejsza od wewnętrznego odcinka siecznej o 2 m, a większa od jej odcinka zewnętrznego o 8 dm.

497. 1) Z jednego punktu wyprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Suma ich równa się 3 dm, a odcinek wewnętrzny siecznej jest o 2 cm mniejszy od stycznej. Obliczyć styczną i sieczną.

2) Z jednego punktu wyprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Suma ich równa się 15 cm, a zewnętrzny odcinek siecznej jest o 2 cm mniejszy od stycznej. Obliczyć styczną i sieczną.

498. Wielkość a jest podzielona w stosunku skrajnym i średnim. Wyrazić odpowiednio większą i mniejszą część.

499. Jeżeli jakakolwiek wielkość podzielona jest w stosunku średnim i skrajnym, to część większa wynosi w przybliżeniu $^5/_8$ całej wielkości. Sprawdzić ten stosunek i określić stopień dokładności takiego przybliżenia.

500. Wyznaczyć część większą, otrzymaną z podziału wielkości w stosunku średnim i skrajnym, jeżeli część mniejsza równa się b.

501. Jeżeli podzielić linję w stosunku średnim i skrajnym i część mniejszą odmierzyć na większej, wtedy i większa część podzieli się również w stosunku średnim i skrajnym, przyczem odcinek odmierzony będzie wtedy częścią większą. Dowieść tego twierdzenia.

502. Średnica jest podzielona w stosunku średnim i skrajnym przez prostopadłą, spuszczoną z punktu okręgu. Znaleźć długość prostopadłej, jeżeli promień koła równa się r.

---

503. Dane są dwie proste równoległe oddalone od siebie o $2a$; pomiędzy niemi dany jest punkt M oddalony od jednej z nich o b. Przez punkt M przeprowadzono okrąg, styczny do obu równoległych. Wyznaczyć odległość pomiędzy rzutami środka i punktu M na jedną z danych równoległych. Uważając a za niezmienne, zbadać zmiany rzutu w zależności od zmian b. Wytłumaczyć możliwość dwóch znaków rzutu w zależności od możliwego dwojakiego położenia punktu M względem środka koła przy tej samej odległości tego punktu od obranej prostej (przykład $2a = 15$ jedn., $b = 3$ jedn.).

504. W koło o promieniu r wpisany jest trójkąt równoramienny, którego suma wysokości i podstawy równa się średnicy koła. Znaleźć wysokość.

505. Obliczyć promień koła, opisanego na trójkącie równoramiennym: 1) jeżeli podstawa $=24$, a wysokość $=6$; 2) jeżeli bok $=12$ cm, a wysokość $=9$ cm; 3) jeżeli bok $=15$ m, a podstawa $=18$ m.

506. W trójkącie równoramiennym podstawa $=48$ cm, a bok $=3$ dm. Obliczyć promienie kół opisanego i wpisanego oraz odległość pomiędzy ich środkami.

507. Promień równa się r; cięciwa łuku danego równa się a. Obliczyć cięciwę łuku 2 razy większego.

508. Promień okręgu równa się 8 cm, cięciwa AB równa się 12 cm. Przez punkt A przeprowadzono styczną, a z punktu B — cięciwę BC równoległą do stycznej. Wyznaczyć odległość pomiędzy styczną i cięciwą BC.

509. Punkt A jest oddalony od prostej MN o a. Promieniem r opisano okrąg, przechodzący przez punkt A i styczny do linji MN. Wyznaczyć odległość pomiędzy otrzymanym punktem styczności a punktem danym A.

510. Promień koła równa się r. Wyznaczyć odległość pomiędzy końcem średnicy a takim punktem okręgu, który jest jednakowo oddalony od tego końca i od stycznej, przeprowadzonej przez drugi koniec tejże średnicy.

511. Promień, prostopadły do średnicy danej, dzieli cięciwę, wychodzącą z końca tej średnicy, w stosunku $8:1$. Wyznaczyć długość cięciwy, jeżeli długość promienia równa się r.

512*. AB jest to średnica; CD — równoległa do niej cięciwa i M—jakikolwiek punkt na średnicy. Należy dowieść, że $MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$.

513. Punkt M dzieli cięciwę AMB na odcinki $AM = 18$ cm i $MB = 50$ cm. Znaleźć długość najmniejszej z cięciw, przechodzących przez punkt M.

514. Środek B półokręgu ABC jest połączony z końcami średnicy AC. Cięciwa DE, równoległa do średnicy AC, jest podzielona przez cięciwy BA i BC na trzy części równe. Przyjmując, że $BA = a$, obliczyć odcinek tej cięciwy od punktu B do cięciwy DE.

515. OA i OB są to dwa nawzajem prostopadłe promienie, których długość wynosi r; oba te promienie przecinają cięciwę CD, dzieląc ją na trzy części równe. Obliczyć odcinki promieni OA i OB od środka koła do cięciwy CD.

516. Na trójkącie równoramiennym opisano koło, a przez środki dwóch boków trójkąta przeprowadzono cięciwę. Znaleźć długość tej cięciwy, jeżeli podstawa trójkąta równa się 12 cm, a bok równa się 8 cm.

517. W kole, którego środek jest O, przeciągnięto cięciwę AB; na nią spuszczono prostopadłą OC; prócz tego przeprowadzono cięciwę AE, która przecina OC w punkcie D. Wyznaczyć długość AE, jeżeli $AB = a$, $OC = b$ i $OD = c$. Przykłady: 1) $a = 24$, $b = 9$, $c = 4$; 2) $b : c = 2$.

518*. AB jest to średnica; C — środek półokręgu; D—punkt na średnicy, przez który przeciągnięto cięciwę CDE. Wyznaczyć długość tej cięciwy, jeżeli $AD = 35$ cm i $BD = 5$ cm.

519*. Na danym kwadracie jest opisane koło; w jeden z otrzymanych odcinków kołowych wpisano kwadrat. Znaleźć jego bok, jeżeli bok kwadratu danego równa się a.

520. Dwie cięciwy: $AB = a$ i $CD = b$, przecinają się wewnątrz koła w ten sposób, że $AC : BD = m : n$. Obliczyć odcinki cięciw.

521. Wyznaczyć długość siecznych MAB i MCD, jeżeli $AB = a$, $CD = b$ i $BC : AD = m : n$.

522. Promień koła równa się r. Wyznaczyć, w jakiej odległości od okręgu znajduje się punkt zewnętrzny, z którego wychodząca sieczna środkowa równa się sumie obu stycznych.

523. Dane są dwa okręgi współśrodkowe. Z punktu A okręgu większego wyprowadzono: cięciwę AB, która styka się z okręgiem mniejszym, i cięciwę $ACDE$, która przecina okrąg mniejszy — w punktach C i D—tak, że $AC = CD$. Znaleźć AE, jeżeli $AB = a$.

524. Cięciwę AB przedłużono na długość $BC = \frac{4}{5} AB$ i z punktu C wyprowadzono styczną CD. Znaleźć stosunek $DA : DB$.

525*. Sieczna AB, poprowadzona przez środek koła, równa się 32, a styczna AC równa się 24. Wyznaczyć długość BC.

526. Na łuku danym, którego cięciwa $AB = a$, wzięto punkt C taki, że $AC : CB = m : n$ $(m > n)$; z tego punktu wyprowadzono styczną, która spotyka przedłużenie cięciwy AB w punkcie D. Wyznaczyć długość CD.

Wielokąty foremne.

Oznaczamy elementy wielokątów w sposób następujący: r — promień okręgu; a_n — bok foremnego n-kąta wpisanego; b_n — bok foremnego n-kąta opisanego; k_n — apotema foremnego n-kąta wpisanego.

527. Wyznaczyć wielkość kąta w n-kącie foremnym ($n = 3$; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 25).

528. 1) Dowieść, że cięciwa prostopadła do promienia w jego środku równa się bokowi foremnego trójkąta wpisanego.

2) Wykazać, że $k_6 = \frac{1}{2} a_3$.

529. Wyznaczyć bok trójkąta foremnego, jeżeli różnica promieni kół opisanego i wpisanego równa się m.

530. Mając r, obliczyć: 1) a_8 i 2) a_{12}.

531. Mając r, obliczyć: 1) k_8; 2) k_{12} i 3) k_{10}.

532. Mając a, obliczyć r, jeżeli n równa się: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 10; 6) 12.

533. Mając a, obliczyć: 1) k_3; 2) k_4; 3) k_6; 4) k_8; 5) k_{10}; 6) k_{21}.

534. Mając k, obliczyć r, jeżeli n równa się: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 10; 6) 12.

535*. Mając r, obliczyć: 1) b_3; 2) b_4; 3) b_6; 4) b_8; 5) b_{10}; 6) b_{12}.

536. Mając a, obliczyć: 1) b_3; 2) b_4; 3) b_6; 4) b_8; 5) b_{10}; 6) b_{12}.

537. Mając r, obliczyć: 1) a_{16}; 2) a_{24}; 3) a_{20}.

538*. Mając r, obliczyć a_5.

539. Sprawdzić (zapomocą rachunku) następujący sposób kreślenia boków 10-kąta i 5-kąta foremnego. W kole prowadzimy średnicę AB i z jej środka O prostopadły do niej promień OC; dzielimy promień OA w punkcie E na połowy i ze środka E promieniem EC zakreślamy łuk do przecięcia w punkcie F z promieniem OB. Wtedy linja OF będzie równa bokowi foremnego wpisanego 10-kąta, a CF—bokowi 5-kąta.

540. a) Wyznaczyć długość przekątnych 8-kąta foremnego, mając: 1) promień r; 2) bok a.

b) Takież zadanie dla 12-kąta foremnego.

541*. Wyznaczyć długość przekątnych 5-kąta foremnego, mając jego bok a.

542*. Wyznaczyć długość przekątnych 5-kąta foremnego, mając promień r.

543. W koło o promieniu r jest wpisany n-kąt foremny i środki jego boków są połączone kolejno ze sobą. Obliczyć bok n-kąta nowego, jeżeli $n =$ 1) 6; 2) 8; 3) 12.

544. 1) W 8-kącie foremnym połączono środki czterech boków co trzeci tak, iż otrzymano kwadrat. Obliczyć bok tego kwadratu, jeżeli bok 8-kąta równa się a.

2) W 12-kącie foremnym połączono środki sześciu boków co trzeci tak, iż otrzymano 6-kąt foremny. Obliczyć jego bok, jeżeli bok 12-kąta równa się a.

545. Z n-kąta foremnego przez ścięcie kątów otrzymano $2n$-kąt foremny. Obliczyć jego bok, jeżeli bok n-kąta równa się a i jeżeli $n =$ 1) 3; 2) 4; 3) 6.

546. 1) W koło jest wpisany trójkąt foremny, w ten trójkąt wpisane jest koło, a w to ostatnie — kwadrat. Obliczyć bok kwadratu, jeżeli promień koła pierwszego równa się r.

2) Na trójkącie foremnym opisano koło, na tem kole opisano kwadrat, a na nim znów koło. Znaleźć promień drugiego koła, jeżeli bok trójkąta równa się a.

547. 1) Cięciwa wspólna dwu przecinających się okręgów równa się a i jest dla jednego okręgu bokiem foremnego trójkąta wpisanego, a dla drugiego — bokiem kwadratu wpisanego. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami.

2) Środki dwóch przecinających się okręgów znajdują się z jednej strony ich wspólnej cięciwy, która odcina od jednego okręgu łuk 60^0, a od drugiego — łuk 30^0. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami, jeżeli długość cięciwy wynosi a.

548. ABC jest trójkątem foremnym wpisanym; AD jest trzecią częścią boku AB, BE—trzecią częścią boku BC. Dowieść, że linja DE równa się promieniowi.

549. Każdy z boków trójkąta foremnego podzielono na trzy części równe i odpowiednie punkty podziału (licząc w jednym kierunku) połączono, skutkiem czego otrzymano nowy trójkąt. Znaleźć promień wpisanego weń koła, jeżeli bok trójkąta danego równa się a.

---

550. 1) Okrąg o promieniu r podzielono na sześć części równych i punkty podziału połączono co trzeci. Obliczyć bok otrzymanej gwiazdy.

2) Okrąg o promieniu r podzielono na osiem równych części i punkty podziału połączono co trzeci. Obliczyć bok otrzymanej gwiazdy.

551*. Mając promień r, obliczyć cięciwę łuku, zawierającego: 1) 108^0; 2) 135^0; 3) 150^0.

552. Mając promień r, wyznaczyć przekątne foremnego 10-kąta wpisanego.

553*. Udowodnić, że w 5-kącie foremnym przecinające się przekątne dzielą się nawzajem w stosunku średnim i skrajnym.

554*. Jeżeli w 5-kącie foremnym poprowadzić wszystkie przekątne, to, przecinając się nawzajem, utworzą one nowy 5-kąt foremny. Znaleźć jego bok, jeżeli bok 5-kąta danego równa się a.

555*. Wyznaczyć stosunek pomiędzy bokami trójkąta, jeżeli jego kąty stosują się do siebie: 1) jak $1:2:3$; 2) jak $3:4:5$.

556. Środek półokręgu połączono z końcami średnicy i przez środki prostych łączących poprowadzono cięciwę. Każdy z jej odcinków zewnętrznych równa się c. Znaleźć promień.

557*. W odcinek kołowy o łuku $= 120^0$ wpisano prostokąt, którego podstawa jest 4 razy większa od wysokości. Znaleźć wysokość prostokąta, jeżeli wysokość odcinka kołowego równa się h.

558*. Na kole danem, którego promień równa się r, opisano pierścień, składający się z kół równych. Obliczyć promienie tych kół, jeżeli liczba ich równa się: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 10.

559. Na dwóch połowach danej prostej wykreślono, jako na średnicach, dwa koła i z każdego końca tej prostej wyprowadzono styczne do koła, wykreślonego przy końcu przeciwnym. Dowieść, że linja, łącząca punkty przecięcia stycznych, równa się bokowi kwadratu, wpisanego w jedno z kół danych.

Pola figur dwuwymiarowych.

1. Pole kwadratu, prostokąta i równoległoboku.

560. Obliczyć pole kwadratu, którego bok równa się: 1) 17 cm; 2) 2 m 5 dm; 3) 5 jedn.

561. Obliczyć bok kwadratu, którego pole równa się: 1) 11664 m kw.; 2) 676 cm kw.; 3) 1,152 m kw.

562. 1) Obliczyć pole kwadratu, mając jego przekątną l.

2) Obliczyć pole kwadratu, wpisanego w koło o promieniu r.

3) Ile razy pole kwadratu opisanego jest większe od pola kwadratu wpisanego (w to samo koło)?

563. 1) W kwadrat o boku a wpisano inny kwadrat, którego pole wynosi $^5/_8$ pola kwadratu pierwszego. Wyznaczyć położenie wierzchołków drugiego kwadratu na bokach pierwszego.

2) W kwadracie suma przekątnej i boku równa się c. Znaleźć pole kwadratu.

564. 1) Obliczyć pole prostokąta, którego boki równają się: 1) 84 cm i 48 cm; 2) 5 m i 2 m 8 dm.

2) Znaleźć wysokość prostokąta, którego pole $= 7{,}68$ m kw., a podstawa $= 12$ dm.

565. 1) Znaleźć boki prostokąta, jeżeli one mają się do siebie, jak $4:9$, a pole równa się 144 jedn. kw.

2) Znaleźć boki prostokąta, którego obwód $= 74$ dm, a pole $= 3$ m kw.

566. Obwód prostokąta jest $2p$, jeden z boków $= z$; przedstawić pole prostokąta jako funkcję z. Zakładając, że obwód nie ulega zmianie, zbadać zmiany pola, gdy zmienia się z; w szczególności wskazać granice zmian z i największą wartość pola.

567. 1) Wewnątrz danego prostokąta mieści się drugi prostokąt, którego boki są równoległe do boków pierwszego i są oddalone od nich o 3 cm. Obliczyć pole, zawarte pomiędzy obwodami, jeżeli obwód wewnętrzny równa się 36 cm.

2) W kwadrat wpisano prostokąt w ten sposób, że jego boki są równoległe do przekątnych kwadratu. Obliczyć pole prostokąta wpisanego, jeżeli przekątna kwadratu danego jest l, a jeden z boków prostokąta wpisanego jest z. Otrzymane rozwiązanie poddać dyskusji, zakładając, że z zmienia się w odpowiednich granicach; wskazać te granice. Kiedy prostokąt wpisany będzie największy? Jaką część całego kwadratu stanowi prostokąt wpisany największy? Wskazać dwie różne wartości dla z, którym odpowiadają dwa prostokąty o równych polach.

568. Zapomocą porównania pól udowodnić słuszność następujących wzorów algebraicznych: 1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; 2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

569. 1) Przekątna prostokąta równa się 305 cm, a pole — 37128 cm kw. Znaleźć obwód tego prostokąta.

2) Bok prostokąta $= z$, jego pole $= q$; obliczyć obwód prostokąta i, zmieniając z, zbadać zmiany obwodu; w szczególności wskazać, kiedy obwód będzie najmniejszy, i podać wartość obwodu najmniejszego.

570. Obliczyć pole równoległoboku, którego podstawa i wysokość wyrażają się w liczbach następujących: 1) 36 cm i 8 cm; 2) 24 dm i 75 dm.

571. Pole równoległoboku zawiera 480 cm kw.; jego obwód wynosi 112 cm; odległość pomiędzy bokami większemi równa się 12 cm. Wyznaczyć odległość pomiędzy bokami mniejszemi.

572. Obliczyć pole równoległoboku, mając dwie wysokości h i h_1 i obwód $2p$.

573. Obliczyć pole równoległoboku, mając dwa boki i kąt pomiędzy niemi: 1) a, b, 30^0; 2) a, b, 45^0; 3) a, b, 60^0.

574. Obliczyć pole rombu, którego wysokość $= 12$ dm, a mniejsza przekątna $= 13$ dm.

575. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB = 37$ dm, a prostopadła, spuszczona z punktu przecięcia przekątnych na bok AD, dzieli go na odcinki: $AE = 26$ dm i $ED = 14$ dm. Znaleźć pole równoległoboku.

576. W kwadracie początek każdego boku połączony jest ze środkiem boku następnego (licząc w jednym kierunku). Proste łączące, przecinając się, tworzą kwadrat wewnętrzny. Udowodnić, że pole tego kwadratu stanowi $^1/_5$ pola kwadratu danego.

577. 1) W trójkąt prostokątny wpisano kwadrat w ten sposób, że jeden z jego boków mieści się na przeciwprostokątnej. Obliczyć pole tego kwadratu, jeżeli odcinki zewnętrzne przeciwprostokątnej są m i n.

2) W trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna $= c$ i wysokość, spuszczona z wierzchołka kąta prostego, jest h, wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden z jego boków leży na przeciwprostokątnej. Przyjmując odległość podstawy górnej prostokąta od wierzchołka kąta prostego za z, obliczyć pole prostokąta i otrzymany wzór przedyskutować w zależności od zmian z.

578. Z każdego wierzchołka kwadratu poprowadzono do następnego wierzchołka łuk wewnętrzny, wynoszący 120^0, i punkty przecięcia łuków połączono; w ten sposób otrzymano kwadrat wewnętrzny. Znaleźć stosunek pól kwadratów.

579. 1) Z punktu przeciwprostokątnej spuszczono prostopadłe na obie przyprostokątne. Obliczyć pole prostokąta, wyciętego przez te prostopadłe, jeżeli odcinki przyprostokątnych przy przeciwprostokątnej są m i n.

2) W trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są a i b, wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego boki leżą na przyprostokątnych. Przedstawić pole prostokąta jako funkcję jego boku z, prostopadłego do przyprostokątnej b, i otrzymaną funkcję przedyskutować w zależności od zmian z.

580. W trójkąt, którego podstawa równa 30 jedn., a wysokość—10 jedn., wpisano prostokąt [1]) o polu=63 jedn. kw. Znaleźć boki tego prostokąta.

581. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB = 100$ cm; prosta, poprowadzona przez punkt przecięcia przekątnych prostopadle do podstawy, odcina od boku BC odcinek $BE = 24$ cm, a od przedłużenia boku AB — odcinek $BF = 25$ cm. Obliczyć pole równoległoboku.

2. Pole trójkąta.

582. Obliczyć pole trójkąta, jeżeli jego podstawa i wysokość równają się odpowiednio: 1) 32 cm i 18 cm; 2) 5 dm i 4 dm; 3) $\sqrt{5}$ i $\sqrt{20}$.

583. 1) Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna równa się 313 cm, a jedna z przyprostokątnych— 312 cm.

2) Pole trójkąta prostokątnego zawiera 720 cm kw., a przy-

[1]) Podstawa prostokąta znajduje się na podstawie trójkąta.

prostokątne stosują się do siebie, jak 9 : 40. Znaleźć przeciwprostokątną.

3) Mając przyprostokątne a i b, znaleźć wysokość, spuszczoną na przeciwprostokątną.

584. Jeżeli dwa boki trójkąta równają się 3 cm i 8 cm, to czy jego pole może się równać: 1) 10 cm kw.; 2) 15 cm kw.; 3) 12 cm kw.?

585. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, mając jego przeciwprostokątną c.

586. Obliczyć pole trójkąta równoramiennego, którego podstawa i bok równają się odpowiednio: 1) 56 cm i 1 m; 2) b i c.

587. 1) Obliczyć pole trójkąta równobocznego, mając bok jego a.

2) Znaleźć bok trójkąta równobocznego, mając jego pole Q.

3) Obliczyć pole trójkąta równobocznego, mając jego wysokość h.

588. 1) Obliczyć pole trójkąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu r.

2) Obliczyć pole foremnego trójkąta opisanego, jeżeli promień koła równa się r.

589. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość dzieli przeciwprostokątną na odcinki równe 32 cm i 18 cm.

590. Obliczyć pole trójkąta, którego wysokość równa się 36, a boki 85 i 60.

591. Obliczyć pole trójkąta, mając jego boki a i b i kąt pomiędzy niemi: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0; 4) 120^0.

592. Znaleźć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna równa się 73 cm, a pole zawiera 1320 cm kw.

593. W trójkącie równoramiennym ramię $= 10$ cm, a pole $=$ $= 48$ cm kw. Znaleźć podstawę.

594. 1) Obliczyć pole rombu, którego przekątne równają się 72 i 40.

2) Znaleźć wysokość rombu, którego przekątne równają się 16 m i 12 m.

3) W rombie suma przekątnych $= l$; przyjmując jedną z przekątnych za z, obliczyć pole rombu. Otrzymane rozwiązanie przedyskutować (porównaj z zad. № 565,3).

4) Pole rombu $= q$, jedna z przekątnych $= z$; obliczyć sumę przekątnych. Otrzymane rozwiązanie przedyskutować (porównaj z zad. № 569,2).

595*. 1) Znaleźć bok rombu, którego przekątne stosują się do siebie, jak $m : n$, a pole równa się Q.

2) Dowieść, że bok będzie najkrótszy, gdy będzie $\frac{m}{n}=1$; t. j. gdy romb będzie kwadratem o tem samem polu.

596. Obliczyć pole trójkąta, mając trzy jego boki:
1) 13; 14; 15. 2) 29; 25; 6. 3) 5; 6; 9.
4) 3; 5; 7. 5) 6; 5; 2,2. 6) 5; $8^2/_3$; $12^1/_3$.
7) 5; 4; $\sqrt{17}$. 8) 5; $\sqrt{58}$; $\sqrt{65}$. 9) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$.

597. 1) Znaleźć najmniejszą wysokość trójkąta, którego boki równają się 25 dm, 29 dm i 36 dm.

2) Znaleźć największą wysokość trójkąta o bokach: 15: 112; 113.

598. Znaleźć boki trójkąta: 1) jeżeli one stosują się do siebie, jak 26 : 25 : 3, a pole trójkąta równa się 9 m kw.; 2) jeżeli boki stosują się do siebie, jak 9 : 10 : 17, a pole równa się 144 jedn. kw.

599. Obliczyć pole 4-kąta, w którym przekątna = 17 cm, a boki, znajdujące się z różnych stron przekątnej, są równe odpowiednio: 10 cm i 21 cm, oraz 8 cm i 15 cm.

600. Promienie dwu przecinających się kół są równe: 17 i 39, a odległość pomiędzy ich środkami wynosi 44. Wyznaczyć długość cięciwy wspólnej.

601. Dowieść, że jeżeli dowolny punkt wewnątrz równoległoboku połączyć ze wszystkiemi jego wierzchołkami, to suma pól dwóch trójkątów przeciwległych jest równa sumie pól dwóch pozostałych.

602. 1) Równoległobok $ABCD$ jest podzielony prostą BE w stosunku 2 : 3 (poczynając od AB). Wyznaczyć odległość AE, jeżeli $AD = 10$ cm.

2) W równoległoboku $ABCD$ przeciągnięto sieczną BE, przecinającą bok BC w punkcie E; $BC = a$. Oznaczając AE przez z, znaleźć stosunek części ABE równoległoboku do jego części pozostałej i otrzymany wzór przedyskutować przy zmianie z od wartości o do a.

3) W zadaniu poprzedniem położyć $z = \frac{3}{2}a$ i, nakreśliwszy odpowiedni rysunek, wyznaczyć pole części wspólnej równoległoboku i otrzymanego trójkąta w stosunku do pola całego równoległoboku.

603. Obliczyć pole równoległoboku, jeżeli jeden z jego boków równa się 51, a przekątne — 40 i 74 jednostek.

604. Obliczyć pole trójkąta, którego podstawa równa się a, a kąty przy podstawie wynoszą 30^0 i 45^0.

605*. Obliczyć pole trójkąta, którego dwa boki równają się odpowiednio 27 cm i 29 cm, a środkowa trzeciego boku równa jest 26 cm.

606. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość dzieli przeciwprostokątną c w stosunku średnim i skrajnym.

607. Mając dwa boki i pole trójkąta, znaleźć bok trzeci:
1) $a=17$; $b=28$; $S=210$. 2) $a=7$; $b=11$; $S=\sqrt{1440}$.
3) $a=16$; $b=63$; $S=504$.

608. Równe trójkąty prostokątne ACB i ADB znajdują się z jednej strony wspólnej przeciwprostokątnej AB, przyczem $AD = BC = 12$ cm i $AC = BD = 16$ cm. Obliczyć pole wspólne obu trójkątom danym.

609. W trójkącie ABC dane są trzy boki: $AB = 26$, $BC = 30$ i $AC = 28$. Obliczyć część pola tego trójkąta, zawartą pomiędzy wysokością i dwusieczną, wyprowadzonemi z wierzchołka B.

610. Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano kwadraty i ich wierzchołki wolne połączono. Obliczyć pole otrzymanego 6-kąta, jeżeli bok trójkąta danego równa się a.

611. Kwadratowi ścięto kąty w ten sposób, iż utworzył się 8-kąt foremny. Obliczyć pole tego 8-kąta, jeżeli bok kwadratu równa się a.

612. Boki trójkąta są równe: 13 cm, 14 cm i 15 cm. Znaleźć promień koła, którego środek leży na boku średnim, a które jest styczne do dwóch boków pozostałych.

613. Wierzchołki trójkąta połączono ze środkiem koła wpisanego. Przeprowadzone proste podzieliły pole trójkąta na trzy części: o 28 m kw., 60 m kw. i 80 m kw. Znaleźć boki trójkąta danego.

614. W rombie, którego przekątne równają się $12^1/_2$ cm i $16^2/_3$ cm, wyprowadzono z wierzchołka jednego kąta rozwartego dwie wysokości i końce ich połączono. Obliczyć pole otrzymanego w ten sposób trójkąta.

615. AB i CD są dwa odcinki równoległe; M jest punkt przecięcia się linij AD i BC (łączących końce odcinków nakrzyż). Odcinek $AB = 8$ jedn., odcinek $CD = 12$ jedn., odległość pomiędzy niemi równa się 10 jedn. Obliczyć pole $ABMCD$.

616*. W 4-kącie $ABCD$ jest $AB = 17$, $BC = 41$, $CD = 30$, $AD = 14$ i przekątna $AC = 40$. Obliczyć pole 4-kąta i przekątną BD.

3. Pole trapezu.

617. 1) Podstawy trapezu równają się 35 cm i 29 cm, a pole — 576 cm kw. Znaleźć wysokość trapezu.

2) W trapezie wysokość równa się 8 cm, a pole — 2 dm kw. Obliczyć długość linji środkowej.

3) Pole trapezu równa się 144 jedn. kw., podstawy stosują się do siebie, jak $4:5$; wysokość równa się 16 jedn. Znaleźć podstawy.

618. 1) Pole trapezu $ABCD$ podzielono prostą EF, poprowadzoną równolegle do boku AB. Wyznaczyć stosunek pola trapezu do pola części $ABEF$, jeżeli $AD = a$, $BC = b$ i $AF = z$. Znaleźć taką wartość dla z, by prosta EF dzieliła trapez na połowy.

2) Przekątna dzieli pole trapezu w stosunku $3:7$. W jakim stosunku dzieli je linja środkowa (licząc od mniejszej podstawy)?

619. 1) W trapezie równoramiennym podstawy równają się 51 cm i 69 cm, a ramię — 41 cm. Obliczyć pole.

2) W trapezie równoramiennym ramię $= c$ i suma podstaw $= 2p$. Wyznaczyć pole trapezu jako funkcję różnicy podstaw i przedyskutować zagadnienie.

3) W trapezie równoramiennym pole $= q$, rzut ramienia na podstawę $= z$ i wysokość $= h$. Obliczyć obwód trapezu i przedyskutować zagadnienie.

620. Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego podstawy równają się 42 i 54, a kąt przy podstawie większej wynosi 45^0.

621. W trapezie prostokątnym kąt ostry przy podstawie równa się 30^0, suma podstaw równa się m, oraz suma boków nierównoległych wynosi n. Obliczyć pole trapezu.

622. Obliczyć pole trapezu, którego boki równoległe są równe 6 dm i 2 dm, a nierównoległe — 13 cm i 37 cm.

623. W trapezie równoramiennym podstawa większa równa się 44 dm, ramię $= 17$ dm i przekątna $= 39$ dm. Obliczyć pole tego trapezu.

624. 1) Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego podstawy są równe: 12 dm i 2 m, a przekątne są nawzajem prostopadłe.

2) Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego przekątne są nawzajem prostopadłe, a wysokość równa się h.

625. Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego przekątna równa się c i tworzy z podstawą większą kąt 45^0.

626. Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego podstawy są równe 10 i 26, a przekątne są prostopadłe do ramion.

627*. Obliczyć pole trapezu, którego podstawy równają się 142 cm i 89 cm, a przekątne 120 cm i 153 cm.

628. W kole o promieniu r z jednej strony środka poprowadzono dwie równoległe cięciwy, podpierające łuki 60^0 i 120^0, i końce ich połączono. Obliczyć pole otrzymanego trapezu.

629. W trapezie równoramiennym, opisanym na kole, ramię równa się a, a kąt ostry przy podstawie wynosi 30^0. Obliczyć pole tego trapezu.

630*. Podstawy trapezu są a i b ($a > b$); w odległości z od podstawy mniejszej przeciągnięto prostą równoległą do podstaw. W jakim stosunku dzieli ta prosta pole trapezu, jeżeli wysokość trapezu jest h? Wyznaczyć z w ten sposób, by znaleziony stosunek równał się stosunkowi $m:n$. Przykłady: 1) $m:n = 1$, $b = 6$, $a = 22$, $h = 8$; 2) $m:n = 9:8$, $b = 6$ cm, $a = 11$ cm, $h = 5$ cm.

631. Wewnątrz wielokąta (nieforemnego) mieści się drugi wielokąt o tej samej liczbie boków, którego boki są równoległe do boków pierwszego i oddalone od nich o 5 dm. Obliczyć pole, zawarte pomiędzy obwodami, jeżeli te ostatnie są równe 63 dm i 97 dm.

4. Pole wielokąta.

632. 1) Obliczyć pole 4-kąta, którego przekątne są nawzajem prostopadłe i równają się k i l.

2) Obliczyć pole 4-kąta, którego przekątne równają się k i l i tworzą kąt 30^0.

633. Na bokach prostokąta zbudowano nazewnątrz trójkąty równoboczne i wolne ich wierzchołki połączono. Obliczyć pole 4-kąta otrzymanego, jeżeli boki prostokąta równają się a i b.

634. Na odcinkach AC i CE prostej AE zbudowano – z jednej strony — trójkąty równoboczne ABC i CDE i wierzchołki B i D połączono. Obliczyć pole 4-kąta $ABDE$, jeżeli $AC = a$ i $CE = b$.

635. Punkt M jest środkiem boku AD w 4-kącie $ABCD$. Dane: $MB \perp AB$; $MC \perp CD$; $BD=50$ cm, $AB=15$ cm i $CD=7$ cm. Należy obliczyć pole $ABCD$.

636. Na okręgu o promieniu r odcięto kolejno łuki: $AB=30^0$, $BC=60^0$, $CD=90^0$ i $DE=120^0$ i utworzono 5-kąt $ABCDE$. Obliczyć pole tego 5-kąta.

637. 1) Obwód wielokąta opisanego równa się 60 jedn., a pole zawiera 240 jedn. kw. Znaleźć promień koła.

2) Na okręgu o promieniu $= 25$ cm opisano wielokąt, którego pole równa się 20 dm kw. Obliczyć obwód tego wielokąta.

638. Obliczyć (podług wzoru ogólnego) pole trójkąta foremnego, opisanego na okręgu o promieniu r.

639. Dowieść, że jeżeli z dowolnego punktu wewnątrz wielokąta foremnego spuścić prostopadłe na wszystkie jego boki, to średnia arytmetyczna tych prostopadłych równa się apotemie.

640. 1) Mając promień r, obliczyć pole 6-kąta foremnego wpisanego.

2) Mając promień r, obliczyć pole 6-kąta foremnego opisanego.

3) Znaleźć bok 6-kąta foremnego, mając jego pole S.

641*. 1) Mając promień r, obliczyć pole foremnego wpisanego 8-kąta i 12-kąta.

2) Obliczyć pole foremnego 8-kąta i 12-kąta, mając bok a każdego z nich.

642*. 1) Okrąg o promieniu r podzielono na sześć części równych i punkty podziału połączono co trzeci. Obliczyć pole otrzymanego 6-kąta gwiaździstego.

2) Okrąg o promieniu r podzielono na osiem równych części i punkty podziału połączono co trzeci. Obliczyć pole otrzymanego 8-kąta gwiaździstego.

643. 1) Mając pole Q 12-kąta foremnego wpisanego, obliczyć pole 6-kąta foremnego, wpisanego w ten sam okrąg.

2) Mając pole Q 8-kąta foremnego wpisanego, obliczyć pole kwadratu, wpisanego w ten sam okrąg.

644. Mając promień r, obliczyć pole foremnego opisanego 8-kąta i 12-kąta.

645. Obliczyć pole 10-kąta foremnego: 1) mając promień r; 2) mając bok a.

646*. Obliczyć pole 5-kąta foremnego, mając: 1) promień r; 2) bok a.

647*. Mając promień r, obliczyć pole 24-kąta foremnego wpisanego.

5. Porównanie pól trójkątów i wielokątów.

648. Dowieść, że jeżeli przekątna jakiegokolwiek 4-kąta dzieli drugą przekątną na połowy, to dzieli też na połowy i pole 4-kąta.

649. 1) Na linji, łączącej środki podstaw trapezu, wzięto punkt i połączono go ze wszystkiemi wierzchołkami trapezu. Dowieść, że trójkąty, przylegające do boków nierównoległych trapezu, mają pola równe.

2) Dowieść, że jeżeli środek jednego z nierównoległych boków trapezu połączyć z końcami drugiego, to pole otrzymanego przytem trójkąta będzie równe połowie pola trapezu.

650. 1) Kwadrat i prostokąt mają jednakowe obwody $=2p$. Przyjmując jeden z boków prostokąta za z, wyznaczyć stosunek pól tych figur i dowieść, że kwadrat jest większy od prostokąta.

2) Kwadrat i prostokąt mają jednakowe pola $=Q$. Przyjmując jeden z boków prostokąta za z, znaleźć stosunek obwodów tych figur i dowieść, że obwód kwadratu jest mniejszy.

651. Przekątna trapezu dzieli jego pole w stosunku $3:7$. W jakim stosunku zostanie podzielone pole tegoż trapezu, jeżeli z końca górnej podstawy poprowadzić równoległą do jednego z boków nierównoległych?

652*. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty i wolne ich wierzchołki połączono. Obliczyć pole otrzymanego 6-kąta, jeżeli przyprostokątne trójkąta danego równają się a i b.

653. 1) Wyznaczyć stosunek pól P i Q dwóch trójkątów, mających po równym kącie, zawartym w pierwszym trójkącie pomiędzy bokami o długości 12 cm i 28 cm, a w drugim — pomiędzy bokami o długości 21 cm i 24 cm.

2) W trójkącie jeden z kątów jest niezmienny, a suma boków, kąt ten obejmujących, także jest stała i równa się c. Jeden z tych boków jest z (zmienny); wyznaczyć pole trójkąta i dowieść, że jest ono największe, gdy te boki są równe.

654. W trójkącie ABC bok BA przedłużono o długość $AD=0{,}2\,BA$ i bok BC — o długość $CE=\frac{2}{3}BC$; punkty D i E połączono. Znaleźć stosunek pól ABC i DBE.

655. Zapomocą porównania pól wykazać własności dwusiecznej w trójkącie.

656. Ile razy powiększy się pole trójkąta, jeżeli każdy z boków powiększyć 4 razy? 5 razy?

657. Bok trójkąta równa się 5 cm. Czemu się równa odcinek odpowiedni podobnego doń trójkąta, którego pole jest 2 razy większe?

658. Jaką część pola (licząc od wierzchołka) odcina linja środkowa trójkąta?

659. Wysokość trójkąta równa się h. W odległości z od wierzchołka przechodzi linja równoległa do podstawy, dzieląca pole trójkąta na 2 części. Znaleźć stosunek tych części. Przy jakiej wartości z stosunek ten będzie równy $\frac{m}{n}$? Przy jakiej wartości z równoległa dzieli trójkąt na połowy? Przy jakiej wartości z górna część pola będzie większa od dolnej i naodwrót?

660. 1) Bok trójkąta podzielono w stosunku $2:3:4$ (licząc od wierzchołka do podstawy) i z punktów podziału wyprowadzono proste równoległe do podstawy. W jakim stosunku zostało podzielone pole trójkąta?

2) Uogólnić zadanie poprzednie.

661. Prosta równoległa do podstawy trójkąta dzieli jego bok w stosunku $5:3$ (licząc od wierzchołka), a pole — na części, których różnica równa się 56 cm kw. Obliczyć pole tego trójkąta. (Zob. zadanie № 659).

662. Proste równoległe do podstawy podzieliły pole trójkąta w stosunku $9:55:161$ (od wierzchołka ku podstawie). W jakim stosunku zostały podzielone boki? (Zob. zad. № 660, 2).

663. Jaką część odpowiednich figur opisanych o tej samej liczbie boków stanowią następujące figury wpisane: 1) trójkąt foremny; 2) kwadrat; 3) 6-kąt foremny? (Rozwiązać zagadnienie, nie obliczając pól).

664. Suma pól trzech wielokątów podobnych równa się 232 dm kw., a obwody ich mają się do siebie, jak $2:3:4$. Obliczyć pole każdego wielokąta.

665. 1) W równoległoboku, którego boki stosują się do siebie, jak $2:3$, poprowadzono równoległą do boku mniejszego, odcinającą równoległobok podobny do danego. W jakim stosunku dzieli ta równoległa pole równoległoboku danego?

2) Trapez o podstawach a i b podzielono zapomocą prostej równoległej do podstaw na dwie podobne do siebie części. Znaleźć stosunek pól tych części.

666. 1) Kwadrat i romb mają jednakowe boki $=a$. Znaleźć stosunek ich pól i dowieść, że kwadrat jest większy od rombu, przyjmując za zmienną pomocniczą z jedną z przekątnych rombu.

2) Kwadrat i romb mają jednakowe pola $=Q$. Oznaczając jedną z przekątnych rombu przez z, znaleźć stosunek ich obwodów i dowieść, że obwód kwadratu jest mniejszy.

---

667. W równoległoboku połączono, idąc w jednym kierunku, środek każdego boku z końcem boku następnego, wskutek czego utworzył się równoległobok wewnętrzny. Dowieść, że jego pole stanowi $^1/_5$ pola równoległoboku danego.

668. Znaleźć stosunek pomiędzy podstawami takiego trapezu, który ma pole równe polu swego trójkąta dopełniającego.

669. Prosta, przeciągnięta pomiędzy bokami trójkąta, dzieli jeden z nich w stosunku $3:7$ (licząc od wierzchołka), a pole trójkąta w stosunku $3:22$ (licząc w ten sam sposób). Czy ta prosta jest równoległa do podstawy i w jakim stosunku dzieli ona bok drugi?

670. Każdy z boków trójkąta podzielono na trzy części równe i odpowiednie punkty podziału (licząc w tym samym kierunku)

połączono tak, iż otrzymano trójkąt wewnętrzny. Dowieść, że pole tego trójkąta stanowi $^1/_3$ pola trójkąta danego.

671. Pole trójkąta prostokątnego podzielono na połowy zapomocą prostej, prostopadłej do przeciwprostokątnej. Znaleźć odległość pomiędzy tą prostą a wierzchołkiem mniejszego kąta ostrego, jeżeli większa przyprostokątna równa się 20 cm.

672. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne stosują się do siebie, jak $3:4$, a wysokość dzieli pole trójkąta na części, których różnica wynosi 84 cm kw. Obliczyć pole całego trójkąta.

673. Z punktu, dzielącego bok trójkąta w stosunku $m:n$, wyprowadzono proste równoległe do dwóch boków pozostałych. W jakim stosunku zostało podzielone (na 3 części) pole trójkąta?

674. Z punktu zewnętrznego A wyprowadzono do koła styczną AB i sieczną ACD. Obliczyć pole trójkąta CBD, jeżeli $AC:AB=2:3$ oraz pole $ABC=20$ cm kw.

675. AB i CD są dwie nie przecinające się cięciwy, przyczem $\smile AB=120^0$ i $\smile CD=90^0$; M jest punkt przecięcia linji AD i BC. Obliczyć pola AMB i CDM, jeżeli ich suma wynosi 1 dm kw.

676. 1) AB jest średnicą, BC i AC — cięciwy, przyczem $\smile BC=60^0$; D jest punktem przecięcia przedłużonej średnicy i stycznej CD. Wyznaczyć stosunek pól DCB i DCA.

2) AB jest średnicą, AC i BC—cięciwy, przyczem jest $BC:r=z$. Przez C przeciągnięto styczną do przecięcia w punkcie D z przedłużeniem AB. Wyznaczyć stosunek pól ABC i CBD. W jakich granicach może się zmieniać z? Przy jakiej wartości z pierwsze pole będzie 2 razy większe od drugiego, a przy jakiej—równe drugiemu? Kiedy pierwsze pole będzie większe od drugiego i naodwrót?

677*. Bok trójkąta jest podzielony na n równych części prostemi, poprowadzonemi wewnątrz trójkąta równolegle do podstawy. Z obu końców każdej równoległej spuszczono prostopadłe na następną dolną (a z końców przyległej do podstawy — na podstawę). Wyznaczyć sumę pól otrzymanych prostokątów, jeżeli pole trójkąta danego równa się Q. Z otrzymanego wzoru wywnioskować, co się będzie działo, gdy n dążyć będzie do nieskończoności, t. j. gdy będziemy powiększali nieograniczenie liczbę części podziału?

678. 1) Znaleźć stosunek pól dwóch 6-kątów foremnych, z których drugi otrzymano, łącząc środki boków pierwszego.

2) Jeżeli wszystkie wierzchołki 6-kąta foremnego połączyć co trzeci, to wskutek przecięcia się łącznic otrzymamy wewnętrzny 6-kąt foremny. Dowieść, że jego pole równa się $^1/_3$ pola 6-kąta danego.

679. 1) $ABCD$ jest kwadratem; E i F są środkami boków CD i AD, M—punktem przecięcia linji BE i CF. Dowieść, że pole BMC stanowi $^1/_5$ pola kwadratu.

2) Z wierzchołka B kwadratu przeciągnięto prostą BE, która od boku CD odcina część $CE = \frac{CD}{z}$; z wierzchołka C wyprowadzono prostopadłą do BE, która przecina BE w punkcie M i AD w punkcie F. Wyznaczyć stosunek FD do AD oraz stosunek pola BMC do pola kwadratu. Jaką wartość zachowuje zawsze z, a jaką stosunek pól? Co będzie, gdy $z = 1$? Jaką wartość musi mieć z, by pole trójkąta stanowiło $^1/_5$ kwadratu?

680. Wysokość dzieli podstawę trójkąta na części, równe odpowiednio 18 cm i 7 cm. Prostopadle do podstawy poprowadzono prostą, dzielącą pole trójkąta na połowy. Wyznaczyć odległość pomiędzy tą prostą a wierzchołkiem kąta mniejszego przy podstawie.

681. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AB i BC mają się do siebie, jak $1:3$; $BD \perp AC$, $DE \perp AB$ i $DF \perp BC$. Jaką część pola ABC stanowi pole $BEDF$?

682. Trójkąt i wpisany weń romb mają kąt wspólny. Boki trójkąta, zawierające ten kąt, stosują się do siebie, jak $m:n$. Znaleźć stosunek pola rombu do pola trójkąta.

683. W trójkącie ABC bok $BC = a$ i $AB = b$; BD — dwusieczna; EF — równoległa do DC, odcinająca od trójkąta DBC część $DEFC$, równą polu trójkąta ABD. Wyznaczyć odcinek BF.

684. Boki trójkąta podzielono w stosunku $m:n$ (idąc w jednym kierunku) i punkty podziału połączono. Wyznaczyć stosunek pola trójkąta wewnętrznego do pola trójkąta danego. (Zob. zadanie № 869).

685*. Linją równoległa do podstawy trójkąta dzieli jego wysokość w stosunku średnim i skrajnym, przyczem odcinek większy znajduje się przy wierzchołku. Dowieść, że przytem pole trójkąta zostało podzielone również w stosunku średnim i skrajnym, oraz że część większa znajduje się przy podstawie trójkąta.

686*. Pole trapezu podzielono do połowy linją równoległą do podstaw a i b. Znaleźć długość tej linji.

687. 1) Trapez podzielono przekątnemi na cztery trójkąty. Udowodnić, że trójkąty, przyległe do boków nierównoległych, są równoważne.

2) AD i BC są to podstawy trapezu $ABCD$; O jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Wyznaczyć sumę pól AOB i COD, jeżeli podstawy trapezu równają się a i b, a jego wysokość równa się h.

688*. 1) Trapez jest podzielony przekątnemi na cztery trójkąty. Dowieść, że pole trójkąta, przylegającego do nierównoległego boku trapezu, jest średnią proporcjonalną pomiędzy polami trójkątów przyległych do podstaw trapezu.

2) $AD = a$ i $BC = b$ są to podstawy trapezu $ABCD$; O jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Znaleźć stosunek sumy pól AOD i BOC do pola trapezu.

689*. Dowieść, że pole foremnego $2n$-kąta wpisanego jest średnią proporcjonalną pomiędzy polami wpisanego i opisanego n-kątów foremnych.

Obliczanie środkowych, dwusiecznych i promieni kół opisanego i wpisanego w trójkątach.

690. Dowieść, że w trójkącie suma kwadratów trzech środkowych stosuje się tak do sumy kwadratów trzech boków, jak $3:4$.

691. 1) Podstawa trójkąta równa się 22 cm, a boki — 13 cm i 19 cm. Obliczyć środkową podstawy.

2) Obliczyć wszystkie środkowe trójkąta, w którym $a = 2$, $b = 3$ i $c = 4$.

692. W trójkącie jeden z boków równa się 26 cm, a jego środkowa ma 16 cm. Obliczyć dwa pozostałe boki tego trójkąta, jeżeli one stosują się do siebie, jak $3:5$.

693. Środkowe przyprostokątnych są m i n. Obliczyć środkową przeciwprostokątnej.

694. 1) Wyznaczyć długość linji, łączącej środki podstaw trapezu, jeżeli podstawa mniejsza równa się b, większa a i suma kątów przy podstawie większej wynosi 90^0.

2) W trapezie podstawy są równe 9 cm i 23 cm, a boki nierównoległe — 7 cm i 11 cm. Wyznaczyć długość linji, łączącej środki podstaw.

695*. W trójkącie ABC obliczyć dwusieczną kąta A przy następującej długości boków: 1) $a = 7$; $b = 6$; $c = 8$. 2) $a = 18$; $b = 15$; $c = 12$. 3) $a = 39$; $b = 20$; $c = 45$.

696*. Mając dwa boki trójkąta i dwusieczną kąta pomiędzy temi bokami, znaleźć odcinki trzeciego boku: $b = 20$; $c = 45$; $l_a = 24$.

697. Jeżeli boki trójkąta stosują się do siebie, jak $4:5:6$, to kąt największy jest 2 razy większy od najmniejszego. Sprawdzić to (zapomocą dwusiecznej kąta większego).

698*. W trójkącie ABC znaleźć bok a, mając boki b i c, oraz $A = 2B$.

699. W odcinku kołowym cięciwa $a = 80$ m i wysokość $h = 24$ m. Wyznaczyć długość stycznej, wyprowadzonej z końca łuku do spotkania z przedłużoną wysokością odcinka kołowego. Jeśli będziemy uważali h za zmieniające się, to w jakich granicach może ono się zmieniać i jak zmienia się równocześnie styczna? Przedyskutować zagadnienie w przypadku, gdy h dąży do o.

700. Z końca B średnicy AB wyprowadzono styczną BC i z punktu C poprowadzono drugą styczną, spotykającą przedłużenie BA w punkcie D. Wyznaczyć długość CD, jeżeli promień koła $r = 4$ jedn., a $CB = a = 12$ jedn.

701. 1) Dowieść, że w trójkącie prostokątnym promień koła wpisanego równa się połowie różnicy pomiędzy sumą przyprostokątnych a przeciwprostokątną.

2) Przyprostokątne równają się 40 cm i 42 cm. Znaleźć promienie kół opisanego i wpisanego.

702. Wyznaczyć położenie względne środka koła opisanego, gdy wiadome są trzy boki trójkąta lub ich stosunek: 1) 5; 8; 10. 2) 8; 7; 5. 3) 80; 315; 325.

703. Obliczyć dla trójkąta R i r przy następującej długości boków: 1) 13; 14; 15. 2) 15; 13; 4. 3) 35; 29; 8. 4) 4; 5; 7.

704*. 1) Znaleźć promień koła, opisanego na trapezie równoramiennym, którego podstawy są a i b $(a < b)$, a ramię — c.

2) W zadaniu poprzedniem wprowadzić do rachunku rzut ramienia na podstawę i przedyskutować zagadnienie w zależności od zmian tego rzutu (trzeba wtedy i jedną z podstaw uważać za zmienną, np. b).

705*. W trójkącie ABC zapomocą dwóch boków a i b i promienia R koła opisanego znaleźć bok trzeci ($a = 17$; $b = 10$; $R = 10^5/_8$).

706. Na trójkącie o bokach 10 cm, 15 cm i 20 cm opisano koło, a na tem kole opisano trójkąt o bokach równoległych do boków trójkąta danego. Znaleźć boki drugiego trójkąta.

707*. Dowieść, że w trójkącie prostokątnym koło wpisane dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których iloczyn daje pole tego trójkąta.

708*. Niech α, β i γ będą odcinkami boków trójkąta, utworzonemi przez punkty styczności koła wpisanego. Dowieść, że $S = \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (\alpha + \beta + \gamma)}$.

709. Boki trójkąta stosują się do siebie, jak 13 : 14 : 15. W jakim stosunku zostanie podzielone pole tego trójkąta przez prostą, poprowadzoną przez środek koła wpisanego równolegle do boku średniego?

710*. W trójkącie ABC wycięto $^1/_{16}$ jego pola w kształcie trójkąta DEF, którego boki są równoległe do boków trójkąta ABC i jednakowo od nich oddalone. Znaleźć tę odległość, jeżeli boki trójkąta ABC są równe 13 cm, 37 cm i 40 cm.

711*. W trójkącie ABC jest $a = 25$; $b = 30$; $\sphericalangle B = 2A$. Znaleźć c, R i r.

Długość okręgu i łuku. Pole koła i jego części.

W zadaniach liczbowych tego działu do rachunku przybliżonego wzięto $\pi = 3{,}14$ *oraz* $\frac{1}{\pi} = 0{,}32.$ [1]. *(Wyjątki zaopatrzone są w odpowiednie wskazówki).*

712. Obliczyć długość okręgu, jeżeli promień równa się: 1) 10 cm; 2) 15 m; 3) 35 jedn.

713. Obliczyć promień, jeżeli długość okręgu wynosi: 1 m; 2) 25 cm; 3) 4,75 jedn.

714. Mając promień r, obliczyć długość łuku, zawierającego: 1) 45^0; 2) $24^030'$; 3) $5^014'15''$.

715. Znaleźć promień łuku, jeżeli jego długość równa się l, a wielkość (wyrażona w stopniach) wynosi: 1) 135^0; 2) $10^040'$; 3) $210^050''$.

716. Wyznaczyć liczbę stopni łuku, jeżeli wiadomy jest jego promień r i długość l; 1) $r = 10$; $l = 45$. 2) $r = 15$; $l = 6$.

717. Wyrazić w stopniach i minutach łuk, którego długość równa się promieniowi $\left(\frac{1}{\pi} = 0{,}31831\right)$.

718. Mając cięciwę a, wyznaczyć długość jej łuku, jeżeli ten zawiera: 1) 60^0; 2) 90^0; 3) 120^0.

719. Mając długość łuku l, znaleźć jego cięciwę, jeżeli łuk zawiera: 1) 60^0; 2) 90^0; 3) 120^0.

720. Znaleźć promień okręgu, który jest dłuższy od swej średnicy o 107 cm.

721. O ile zwiększy się długość okręgu, jeżeli promień powiększyć o m?

---

[1] $\pi = 3{,}14159...$
$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183...$

722. Z dwóch okręgów współśrodkowych jeden równa się 167 cm, a drugi 117 cm. Wyznaczyć szerokość pierścienia.

723. Znaleźć długość okręgu, który jest większy o 7 cm od obwodu foremnego 6-kąta wpisanego.

724. Łuk odcinka kołowego zawiera 120^0 i ma długość l. Znaleźć długość okręgu, wpisanego w ten odcinek.

725. Prostą podzielono na kilka części równych i na nich, jako na średnicach, nakreślono półokręgi na zmianę — u góry i u dołu. Dowieść, że długość otrzymanej linji falistej równa się długości półokręgu, wykreślonego na całej prostej.

726. Z końców łuku ACB, zawierającego 120^0, wyprowadzono styczne do przecięcia wzajemnego w punkcie D i w otrzymaną figurę $ACBD$ wpisano okrąg. Dowieść, że ma on tę samą długość, co i łuk ACB.

727. W kwadrant (ćwiartka koła) wpisano półokrąg, mający końce średnicy na bocznych promieniach kwadrantu. Dowieść, że łuk kwadrantu i półokrąg wpisany mają równą długość.

728. Pomiędzy bokami trójkąta równoramiennego nakreślono dwa łuki styczne do podstawy, przyjmując za środek jednego łuku wierzchołek trójkąta, a za środek drugiego — środek wysokości. Dowieść, że łuki te mają długość jednakową.

729. Oznaczyć stopień dokładności przy zamianie $^1/_2\ C$ na $a_3 + a_4$ (w celu przybliżonego wyprostowania okręgu).

730. Jeden ze sposobów przybliżonego wyprostowania okręgu polega na tem, że okrąg zamienia się przez obwód trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna $= {}^6/_5$ średnicy, a druga przyprostokątna $= {}^3/_5$ średnicy. Oznaczyć stopień dokładności tego sposobu.

---

731. Obliczyć pole koła przy następującej długości promienia: 1) 10 cm; 2) 4 m; 3) 2,5 jedn.

732. Znaleźć promień koła, którego pole równa się: 1) 2 dm kw; 2) 50 m kw; 3) 17 dm kw.

733. 1) Obliczyć pole koła, jeżeli długość okręgu wynosi 8 jedn.

2) Znaleźć długość okręgu, jeżeli pole koła równa się 18 cm kw.

3) Koło i kwadrat mają równe obwody; znaleźć stosunek ich pól. Które z nich jest większe?

4) Koło i kwadrat mają równe pola; znaleźć stosunek ich obwodów. Który obwód jest mniejszy?

734. Obliczyć pole koła, jeżeli pole kwadratu wpisanego równa się F.

735. Obliczyć pole koła, jeżeli jest ono mniejsze od pola kwadratu opisanego o 4,3 m kw.

736. Znaleźć stosunek pomiędzy polami kół wpisanego i opisanego: 1) dla trójkąta foremnego; 2) dla kwadratu; 3) dla 6-kąta foremnego.

737. Jaką część pola koła stanowi pole wpisanego kwadratu, a jaką pole wpisanego 12-kąta foremnego?

738. Znaleźć stosunek pól dwóch półokręgów, z których drugi mieści się wewnątrz pierwszego w ten sposób, że dotyka średnicy pierwszego, a jego średnica własna jest równoległa do średnicy pierwszego i służy pierwszemu półokręgowi za cięciwę.

739. 1) Obliczyć pole pierścienia, jeżeli promienie okręgów równają się 8 cm i 7 cm.

2) W pierścieniu koncentrycznym cięciwa większego okręgu, stykająca się z mniejszym, równa się a. Obliczyć pole pierścienia.

3) Wyznaczyć pole, jakie zakreśli styczna długości a, gdy punkt styczności wykona całkowity obrót po okręgu.

740. Koło jest otoczone sześciu równemi mu kołami i otrzymany zespół siedmiu kół równych jest objęty przez pierścień współśrodkowy, równy ich sumie. Dowieść, że szerokość tego pierścienia równa sie promieniowi kół.

741. Obliczyć pole wycinka, jeżeli promień równa się r, a łuk zawiera: 1) $67^0 30'$; 2) $15^0 45'$; 3) $200^0 40''$.

742. Znaleźć promień wycinka, jeżeli jego pole równa się q, a kąt środkowy wynosi: 1) 72^0; 2) $36'$; 3) $40' 50''$.

743. Promień wycinka równa się r, a pole równa się q. Wyznaczyć wielkość kąta środkowego (albo łuku).

744. Obliczyć w stopniach całkowitych kąt wycinka, którego pole jest równe kwadratowi wpisanemu $\left(\frac{1}{\pi} = 0{,}318\right)$.

745. Obliczyć pole odcinka, jeżeli promień $= r$, a łuk zawiera: 1) 120^0; 2) 90^0; 3) 60^0; 4) 45^0; 5) 30^0; 6) 36^0.

746. Obliczyć pole odcinka, jeżeli cięciwa $= a$, a łuk zawiera: 1) 120^0; 2) 90^0; 3) 60^0; 4) 45^0; 5) 30^0; 6) 36^0.

747. Obliczyć pole odcinka, jeżeli promień $= r$, a łuk zawiera: 1) 135^0; 2) 150^0; 3) 162^0.

748. 1) Półokrąg o promieniu r podzielono na trzy części równe i punkty podziału połączono z końcem średnicy. Obliczyć pole środkowej części półokręgu.

2) Końce łuku CD są jednakowo oddalone od końców średnicy AB. Obliczyć pole, zawarte pomiędzy łukiem CD a cięciwami AC i AD, jeżeli pole koła równa się Q, a łuk CD zawiera n^0.

749. 1) W kole o promieniu r nakreślono po jednej stronie środka dwie cięciwy równoległe, z których jedna ściąga łuk 120^0, a druga — 60^0. Obliczyć część pola koła, zawartą pomiędzy cięciwami.

2) Takież zadanie dla łuków 150^0 i 90^0.

750. Wspólna cięciwa dwóch przecinających się okręgów równa się a i podpiera w jednem kole łuk 60^0, a w drugiem — łuk 90^0. Obliczyć pole wspólnej obu kołom części.

751. 1) Pole koła danego równa się Q. Obliczyć pole wpisanego w nie prostokąta, którego boki mają się do siebie, jak $m:n$.

2) W poprzedniem zadaniu dowieść, że prostokąt jest największy, gdy $\frac{m}{n}=1$. (Zob. rozwiązanie).

3) W zadaniu tem obliczyć obwód prostokąta i dowieść, że jest on największy, gdy $\frac{m}{n}=1$.

752. W koło o promieniu r wpisano prostokąt, którego pole stanowi połowę pola koła. Znaleźć boki tego prostokąta.

753. Na kole, którego pole równa się Q, opisano romb z kątem 30^0. Obliczyć pole tego rombu.

754. Na trójkącie foremnym opisano okrąg i w tenże trójkąt wpisano okrąg. Obliczyć pole pierścienia, zawartego pomiędzy temi okręgami, jeżeli pole trójkąta jest równe Q.

755. AMB jest łukiem, zawierającym 120^0; OA i OB są promieniami; AC i BC — styczne; DME — łuk, nakreślony ze środka C pomiędzy CA i CB, i styczny do łuku AMB. Znaleźć stosunek pomiędzy polami wycinków $CDME$ i $OAMB$.

756. Z końców łuku ACB wyprowadzono dwie styczne do przecięcia w punkcie D. Obliczyć pole $DACB$, zawarte pomiędzy stycznemi i łukiem, jeżeli promień łuku równa się r, a wielkość łuku: 1) 90^0; 2) 120^0; 3) 60^0.

757. Ze środka trójkąta równobocznego opisano okrąg, przecinający jego boki w taki sposób, że łuki zewnętrzne zawierają po 90^0. Oznaczywszy bok trójkąta danego przez a, obliczyć pole, ograniczone przez łuki wewnętrzne i środkowe odcinki boków.

758. Dwa półkola równe położono jedno na drugiem tak, że ich średnice są równoległe, a okrąg jednego przechodzi przez środek drugiego. Obliczyć pole wspólne obu półkolom, mając ich promień r.

759. 1) Na każdym z boków kwadratu, przyjętym za średnicę, nakreślono półokrąg wewnątrz kwadratu. Obliczyć pole otrzymanej rozetki, jeżeli bok kwadratu równa się a.

2) Na bokach rombu opisano, jako na średnicach, półokręgi zwrócone do wewnątrz. Obliczyć pole otrzymanej rozetki, jeżeli przekątne rombu równają się a i b.

760. 1) W koło o promieniu r jest wpisany kwadrat i prostokąt. Przyjmując bok prostokąta z za zmienną pomocniczą, znaleźć stosunek pól figur wpisanych; które z nich jest większe?

2) W zadaniu poprzedniem znaleźć stosunek obwodów figur wpisanych; który obwód jest większy?

761. W trójkącie równobocznym przez każde dwa wierzchołki oraz przez środek trójkąta przeprowadzono łuki. Obliczyć pole otrzymanej rozetki, jeżeli bok trójkąta wynosi a.

762. Na ramionach kąta prostego BAC odmierzono równe odcinki AB i AC, mające długość a, i wewnątrz kąta nakreślono łuki $APMB$ i $AQMC$, zawierające po 120^0 (M — punkt ich przecięcia). Należy obliczyć pole, zawarte pomiędzy łukami APM i AQM.

763. Przez punkty A i B przeprowadzono dwa łuki, zwrócone wypukłością w jedną stronę: łuk $AMB=240^0$ i łuk $ANB=120^0$. Odległość pomiędzy środkami tych łuków wynosi a. Obliczyć pole, zawarte pomiędzy łukami.

764*. Dowieść, że jeżeli promień koła danego podzielić w stosunku średnim i skrajnym i, wziąwszy część większą, nakreślić za jej pomocą okrąg współśrodkowy z danym, to pole koła danego również podzieli się w stosunku średnim i skrajnym, przyczem częścią większą będzie pierścień.

765. Średnicę podzielono na części równe; na każdym z odcinków, zawartych pomiędzy każdym z końców średnicy a każdym z punktów podziału, opisano półokrąg w ten sposób, że półokręgi, przechodzące przez różne końce średnicy, zwrócone są w różne strony. W ten sposób powstają krzywe, dzielące koło na części równej wielkości, których obwody są równe obwodowi danego koła. Dowieść tego.

766. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC z wierzchołka kąta prostego zakreślono promieniem BA łuk BDC; przyjmując za środek wierzchołek A, promieniem AC zakreślono łuk CEF, przyczem F jest punktem na przedłużeniu przyprostokątnej AB. Dowieść, że wycinki $BADC$ i $ACEF$ mają pola równe.

767. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC na przeciwprostokątnej BC, jako na średnicy, opisano półokrąg $BDAEC$, a z punktu A zakreślono łuk BFC promieniem AB. Dowieść, że pole odcinka kołowego BFC jest równe sumie pól odcinków BDA i CEA.

768. AB i CD są to dwie nawzajem prostopadłe średnice. Z punktu D promieniem DA zakreślono łuk AMB. Dowieść, że sierp $AMBC$ i trójkąt ABD mają równe pola.

769. Z punktu C półokręgu danego spuszczono prostopadłą CD na średnicę AB i na odcinkach AD i DB opisano nowe półokręgi po jednej stronie z danym. Dowieść, że pole, zawarte pomiędzy trzema półokręgami, równa się polu koła o średnicy CD.

Dział ogólny.

770. 1) W trójkącie prostokątnym przez środek wysokości (spuszczonej z wierzchołka kąta prostego) przeprowadzono prostą równoległą do większej przyprostokątnej. Znaleźć jej długość, jeżeli przyprostokątne równają się 75 cm i 100 cm.

2) Poprzednie zadanie uogólnić, biorąc dla przyprostokątnych wartości a i b $(b>a)$ i przypuszczając, że punkt, przez który przechodzi równoległa, dzieli wysokość w stosunku $m:n$ (licząc od wierzchołka). Należy:

1) otrzymane rozwiązanie zastosować do zadania poprzedniego, kładąc $\frac{m}{n}=1$, a następnie dopiero $a=75$ i $b=100$;

2) otrzymane dwa wzory ogólne zastosować do przypadku trójkąta równoramiennego.

771. Znaleźć bok rombu, jeżeli okrąg, przeprowadzony przez wierzchołki obu kątów rozwartych i jednego z ostrych, dzieli większą przekątną na części równe 5 m i 14 dm.

772. Z kołem danem stykają się dwa równe mniejsze — jedno nazewnątrz, drugie wewnątrz, przyczem łuk pomiędzy punktami styczności wynosi 60^0. Wyznaczyć odległość pomiędzy środkami kół mniejszych, jeżeli ich promień równa się r, a promień koła większego równa się R.

773. 1) Podstawa trójkąta równa się 75, a boki — 65 i 70. Wysokość podzielono w stosunku $2:3$ i przez punkt podziału przeprowadzono prostą równoległą do podstawy. Obliczyć pole otrzymanego w ten sposób trapezu.

2) Zadanie poprzednie uogólnić, biorąc dla boków trójkąta wartości a, b i c i przypuszczając, że punkt, przez który przechodzi równoległa, dzieli wysokość w stosunku $m:n$. Otrzymane rozwiązanie zastosować do zadania poprzedniego. Wyznaczyć także stosunek $\frac{m}{n}$ w ten sposób, by pole trapezu było połową pola trójkąta danego.

774. Obliczyć pole trójkąta, mając promień R koła opisanego i dwa kąty, wynoszące 45^0 i 60^0.

775. Znaleźć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, jeżeli ich stosunek równy jest stosunkowi $20:21$, a różnica pomiędzy promieniami kół opisanego i wpisanego wynosi 17.

776. Na średnicy AB koła danego wzięto odcinek CD i nakreślono: półokręgi AC i AD z jednej strony AB i półokręgi BC i BD z drugiej strony AB. Dowieść, że obwód listka $ACBD$ równa się długości okręgu, a jego pole stosuje się do pola okręgu, jak $CD:AB$.

777. W koło o promieniu r wpisany jest prostokąt $ABCD$. Obliczyć pole tego prostokąta, jeżeli łuk AB zawiera: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0.

778. Cięciwy, wyprowadzone ze środka półokręgu, dzielą średnicę koła na trzy części równe. Jaką część średnicy stanowi cięciwa, łącząca końce dwu pierwszych cięciw?

779. $ABMCD$ jest łukiem, zawierającym 210^0; $ABCD$ jest wpisanym weń prostokątem, którego pole równa się Q. Obliczyć pole odcinka $ABMCD$.

780. W równoległoboku stosunek boków oraz stosunek przekątnych wynosi $1:2$. Z wierzchołka kąta rozwartego spuszczono wysokość na bok większy; w jakim stosunku wysokość ta podzieli bok rzeczony?

781. Podstawy trapezu równają się 7 dm i 42 cm, a boki — 26 cm i 3 dm. Obliczyć pole tego trapezu i pole trójkąta dopełniającego, otrzymanego przez przedłużenie boków trapezu.

782. Znaleźć promień koła, wpisanego w wycinek, jeżeli promień wycinka równa się R, a łuk wynosi: 1) 60^0; 2) 90^0; 3) 120^0.

783. W trójkącie ABC spuszczono wysokości BD i CE, i punkty D i E połączono. Znaleźć stosunek pól ADE i ABC: 1) jeżeli $\angle A=45^0$; 2) jeżeli $\angle A=30^0$.

784. Dwie cięciwy równoległe równają się 14 i 40, a odległość pomiędzy niemi wynosi 39. Obliczyć pole koła.

785. W trójkącie równobocznym o boku a każdy wierzchołek służy za środek łuku, łączącego dwa inne wierzchołki. Obliczyć pole figury, ograniczonej przez trzy łuki, i promień koła, wpisanego w tę figurę.

786. Proste, łączące środek jednego z boków większych równoległoboku z końcami drugiego boku większego, są do siebie prostopadłe i równają się 6 cm i 8 cm. Znaleźć boki i przekątne tego równoległoboku.

787. 1) Przeciwprostokątna równa się c, a jeden z kątów ostrych wynosi 75^0. Obliczyć przyprostokątne i wysokość.

2) Takież zadanie dla kąta $67^030'$.

3) Znaleźć przyprostokątne, jeżeli przeciwprostokątna równa się 50 cm, a promień koła wpisanego równa się 6 cm.

788. 1) Dwa wycinki kołowe mają obwody równe, przytem pierwszy ma promień$=r$ i łuk $2r$; przyjmując promień drugiego za z, porównać pola wycinków.

2) Dwa wycinki mają jednakowe pola $= Q$, przytem łuk pierwszego jest dwa razy większy od promienia; przyjmując promień drugiego za z, porównać ich obwody.

789. R i r są promienie dwóch okręgów, położonych jeden nazewnątrz drugiego: a i b oznaczają długości ich wspólnych stycznych, zewnętrznej i wewnętrznej. Należy dowieść, że $a^2-b^2= = 2R \cdot 2r$.

790*. Mając promień r, znaleźć bok foremnego 15-kąta wpisanego.

791. W trójkącie ABC jest $AB = 13$; $AC = 14$ i $BC = 15$. W środku D boku AC wzniesiono prostopadłą, którą przedłużono do przecięcia w punkcie E z przedłużoną dwusieczną kąta B. Wyznaczyć długość DE.

792. AB i BC są to kolejne łuki, wynoszące 30^0 i 90^0. Należy obliczyć pole trójkąta ABC, znając promień r łuków.

793. Dowieść, że jeżeli średnicę koła podzielić w stosunku średnim i skrajnym i na każdej części opisać półokrąg (każdy z innej strony średnicy), to pole koła danego podzieli się także w stosunku średnim i skrajnym.

794*. Na kole, którego promień równa się 4 cm, opisano trapez równoramienny o boku równym 15 cm. Znaleźć promień koła, opisanego na tym trapezie.

795. Sprawdzić równość: cięciwa $\smile 150^0$ — cięciwa $\smile 30^0 = $ $=$ cięciwie $\smile 90^0$.

796. AB jest łukiem okręgu ze środkiem O, AD—prostopadła do promienia OB. Dowieść, że jeżeli odciąć łuk AC, równy (co do długości) tej prostopadłej, to wycinek BOC i odcinek ACB będą miały pola równe.

797*. Prosta równoległa do podstaw trapezu dzieli jego pole w stosunku $m:n$ (licząc od podstawy większej). Wyznaczyć długość tej prostej, jeżeli podstawy trapezu są a i b $(a > b)$.

798. W trójkąt równoboczny wpisano trzy koła równe w ten sposób, że każde dotyka dwóch boków trójkąta i dwóch kół pozostałych. Znaleźć promień tych kół, jeżeli bok trójkąta równa się a.

799. Dwa koła równe o promieniu r są tak położone, że środek jednego leży na okręgu drugiego. Z jednego punktu przecięcia okręgów tych kół wyprowadzono dwie średnice i końce ich połączono zapomocą łuku, mającego środek w punkcie wspomnianym; toż samo uczyniono i z drugim punktem przecięcia okręgów. Obliczyć obwód i pole owalu, w ten sposób otrzymanego.

800*. W 4-kącie $ABCD$ jest $AB = 48$, $BC = 57$, $CD = 73$, $DA = 80$ i przekątna $AC = 63$. Obliczyć pole 4-kąta oraz przekątną BD.

801*. Średnica $AB = 25$, cięciwa $AC = 7$ i cięciwa $BD = 15$ (punkty C i D leżą z jednej strony średnicy); AC i BD przedłużono do wzajemnego przecięcia w punkcie M. Wyznaczyć długość CM i DM.

802. W trójkącie ABC jest $BC = a$, $\angle B = 75^0$ i $\angle C = 60^0$. Znaleźć AB i AC.

803*. Dowieść, że w równoramiennym trapezie opisanym średnica koła jest średnią proporcjonalną pomiędzy podstawami trapezu.

804. Dwie cięciwy równoległe są umieszczone z jednej strony środka i suma odpowiadających im łuków równa się 180^0. Obliczyć część pola koła, zawartą pomiędzy cięciwami, jeżeli łuk mniejszy wynosi n^0, a promień koła równa się r.

805. W trójkącie prostokątnym równoramiennym o przeciwprostokątnej a kąt prosty podzielono na trzy części równe zapomocą prostych, które przedłużono do przeciwprostokątnej. Wyznaczyć odcinki otrzymane na przeciwprostokątnej.

806*. OA i OB są to dwa nawzajem prostopadłe promienie; M jest środkiem OB; z końca C cięciwy AMC wyprowadzono styczną, spotykającą przedłużenie promienia OB w punkcie D. Wyznaczyć długość OD, jeżeli promień koła równa się r.

807. Z wierzchołków n-kąta foremnego jednakowym promieniem zakreślono szereg łuków, przecinających boki przyległe wielokąta; ze środka zaś wielokąta opisano koło styczne do powyższych łuków; przytem promienie łuków i koła dobrano w ten sposób, iżby koło było równe sumie wszystkich wycinków. Znaleźć promień łuków, jeżeli promień wielokąta równy jest R $(n = 4;\ 10;\ 20)$.

808*. Dowieść, że jeżeli kąt rombu równa się 30^0, to bok jest średnią proporcjonalną pomiędzy przekątnemi.

809. W trójkąt wpisano równoległobok. Wyznaczyć stosunek ich pól, jeżeli bok trójkąta stosuje się do leżącego na nim boku równoległoboku, jak $m:n$. Dyskutując otrzymane rozwiązanie, dowieść, że największy z równoległoboków, jakie można w ten sposób wpisać, odpowiada wartości $\frac{m}{n} = 2$ i stanowi połowę trójkąta.

810*. W trójkąt, którego podstawa równa się 14, a boki 13 i 15, wpisano trójkąt równoramienny w ten sposób, że jego podstawa jest równoległa do podstawy trójkąta danego, jeden z boków leży na boku trójkąta danego, a wysokość równa się 7. Wyznaczyć odległość pomiędzy podstawami obu trójkątów.

811*. W prostokącie o bokach a i b połączono środki boków przyległych, a z wierzchołków wyprowadzono prostopadłe do jego przekątnych. Wykazać, że dwa otrzymane przy tem romby są podobne, oraz wyznaczyć stosunek ich pól. Które z pól jest większe?

812. AB, BC i CD są to kolejne łuki po 60^0 każdy, odcięte na okręgu o promieniu r. M jest punktem przecięcia cięciw AC i BD. Obliczyć pole każdej z czterech części koła, dookoła punktu M położonych.

813*. W prostokąt wpisano równoległobok, którego boki są równoległe do przekątnych prostokąta i mają się do siebie, jak $m:n$. Obliczyć pole równoległoboku, jeżeli boki prostokąta równają się a i b. Dowieść, że największym z tak wpisanych równoległoboków jest romb, równy połowie prostokąta.

814*. Obliczyć pole trapezu zapomocą czterech jego boków: a, b, c i d (a i b są podstawy, przyczem $a > b$).

815. Wyznaczyć kąt przy wierzchołku w trójkącie równoramiennym, w którym środki kół wpisanego i opisanego są symetryczne względem podstawy [1]).

816. W czworokąt wpisano romb, którego boki są równoległe do przekątnych czworokąta. Znaleźć bok rombu, jeżeli przekątne czworokąta danego równają się l i m.

817. Boki równoległoboku podzielono w stosunku $m:n$ (w jednym kierunku) i punkty kolejne podziału połączono. Znaleźć stosunek pola nowootrzymanego równoległoboku do pola równoległoboku danego. Dowieść, że najmniejszy z tak wpisanych równoległoboków odpowiada wartości stosunku $\frac{m}{n} = 1$ i jest równy $^1/_2$ danego równoległoboku.

818. W trójkącie ABC wysokość BD równa się 6 i dzieli podstawę AC na części AD i DC, z których DC równa się 3. Znaleźć AD, jeżeli kąt ABD jest 2 razy większy od kąta CBD.

---

[1]) T. j. linja, łącząca je, jest prostopadła do podstawy, która ze swej strony dzieli ją na połowy.

819. Obliczyć pole trójkąta, jeżeli jego wysokość równa się 1 dm i dzieli kąt przy wierzchołku na części, równe 15^0 i 75^0.

820*. Wyznaczyć w trójkącie dwusieczną kąta, zawartego pomiędzy bokami a i b, jeżeli ten kąt wynosi: 1) 120^0; 2) 90^0; 3) 60^0.

821*. W trapezie przez punkt przecięcia przekątnych przeprowadzono prostą, równoległą do podstaw. Wyznaczyć długość odcinka tej prostej, zawartego wewnątrz trapezu, jeżeli podstawy równają się a i b.

822. $ABCD$ jest trapezem—przyczem $AD \parallel BC$; E i F są środkami boków AB i CD; G jest punktem przecięcia linij EC i BF; H—punktem przecięcia linij AF i DE. Obliczyć pole 4-kąta $EGFH$, jeżeli podstawy trapezu równają się a i b, a jego wysokość wynosi h.

823*. W trójkącie ABC jest $a = 20$, $b = 15$ i $A - B = 90^0$. Znaleźć c.

824. Boki równoległoboku są a i b ($a > b$), a kąt pomiędzy niemi równa się 30^0. Obliczyć: 1) pole tego równoległoboku; 2) pole prostokąta, który zostanie utworzony przez przecięcie się linij, dzielących kąty równoległoboku na połowy.

825*. W trójkątach ACB i ADB, leżących z jednej strony wspólnej podstawy AB, kąty C i D są równe po 120^0 każdy; bok AC jest mniejszy od BC i bok BD jest mniejszy od AD. Wyznaczyć długość CD, jeżeli $AB = 49$, a obwody trójkątów danych równają się odpowiednio 104 i 105.

826. Dwa boki trójkąta są b i c, a pole równa się $\frac{bc\sqrt{3}}{4}$. Znaleźć bok trzeci.

827*. Obliczyć pole trójkąta zapomocą trzech jego wysokości h_a, h_b, h_c.

828*. Obliczyć pole trójkąta zapomocą trzech jego środkowych l, m i n.

829. Obliczyć pole trójkąta, jeżeli jeden z jego boków równa się 42 cm, a środkowe dwóch boków pozostałych wynoszą 30 cm i 51 cm.

830. W trójkącie ABC bok $a = 375$, $b = 492$ i $c = 240$. Na tym trójkącie opisano koło i środek M łuku AC (leżącego wewnątrz kąta ABC) połączono z wierzchołkiem B. Obliczyć cięciwę BM.

831*. C jest punktem dowolnym na średnicy AB; DE—cięciwą, przeprowadzoną przez C i tworzącą z AB kąt równy 45^0. Dowieść, że $CD^2 + CE^2$ jest wielkością stałą (jednakową dla wszelkiego położenia C).

832*. Obliczyć pole trójkąta, jeżeli wiadome są jego boki a i b oraz dwusieczna t kąta pomiędzy niemi.

833*. Dowieść, że jeżeli w trapezie prosta równoległa do podstaw jest średnią proporcjonalną pomiędzy niemi, to części trapezu są podobne.

834. W równoległoboku $ABCD$ przez punkt przecięcia przekątnych przeprowadzono prostopadłą do boku BC, spotykającą przedłużenie boku AB w punkcie E; $AB=20$, $BC=30$ i $BE=115$. Znaleźć przekątne BD i AC.

835*. Obliczyć pole czworokąta wpisanego, mając jego boki a, b, c i d.

836*. A jest punktem na okręgu o promieniu r; AB jest styczną równą promieniowi; BC—sieczną, tworzącą z AB kąt równy 15^0. Wyznaczyć długość BC.

837. W trójkącie ABC jest $AB=10$ cm, $BC=17$ cm i $AC=$ $=21$ cm. Wyznaczyć na boku AC taki punkt D, ażeby linja BD była średnią proporcjonalną pomiędzy odcinkami AD i DC. (Obliczyć AD).

838. W trapezie $ABCD$ podstawa większa $AD=a$, podstawa mniejsza $BC=b$. Pole tego trapezu jest podzielone na połowy zapomocą prostej AM. Wyznaczyć stosunek $CM:MD$.

839*. Punkt wewnątrz kąta, liczącego 60^0, jest oddalony od jego ramion odpowiednio o a i o b. Znaleźć jego odległość od wierzchołka kąta.

840. W trapezie punkt przecięcia przekątnych jest oddalony od podstaw o g i k, a równoległa do podstaw, przechodząca przez ten punkt, równa się f. Obliczyć pole trapezu.

841. W trójkącie o bokach a, b i c poprowadzono między a i b prostą, dzielącą go na dwie części o jednakowych polach i obwodach. Wyznaczyć odcinki boków a i b, przylegające do wierzchołka C. — Przykłady: 1) $a=5$; $b=12$; $c=9$. 2) $a=9$; $b=8$; $c=7$.

842*. OA i OB są to dwa nawzajem prostopadłe promienie; C jest punktem dowolnym na łuku AB; DCE—prostą równoległą do cięciwy AB, przyczem D i E są punktami na przedłużeniu promieni OA i OB. Dowieść, że $CD^2+CE^2=AB^2$.

843. Boki trójkąta są: $a=39$; $b=17$; $c=28$. Obliczyć dla tego trójkąta: pole, promień koła opisanego i promienie kół wpisanych (wewnętrznego i trzech zewnętrznych).

844. 1) Znaleźć w trójkącie odległości od środka koła wpisanego do wierzchołków przy następującej długości boków: a) 3; 4; 5; b) 26; 25; 17.

2) Promienie kół wpisanych w trójkącie wynoszą: 66, 24 i 8. Znaleźć promień koła opisanego.

845. W trójkąt równoramienny, którego podstawa $=a$ i wysokość $=b$, wpisano dwa prostokąty, mające swe podstawy na podstawie trójkąta; przytem podstawa górna 1-go prostokąta dzieli wysokość trójkąta na połowy, a podstawa górna drugiego odcina od tej wysokości część, która stosuje się do całej wysokości, jak $m:n$. 1) Porównać pola prostokątów. 2) Porównać obwody prostokątów.

846. W trójkącie równoramiennym ramię $=9$ m, a podstawa $=12$ m. Na nim opisano koło i wpisano weń koło. Obliczyć cięciwę koła opisanego, przeprowadzoną przez punkty styczności koła wpisanego z ramionami.

847. Z wierzchołka kąta prostego w trójkącie spuszczono prostopadłą na przeciwprostokątną. Znaleźć obwód tego trójkąta, jeżeli obwody otrzymanych przytem jego części są równe M i N.

848. Okrąg o promieniu r podzielono na sześć części równych i pomiędzy kolejnemi punktami podziału przeprowadzono równe łuki wewnętrzne o promieniu takim, że łuki te stykają się, przyczem punkty styczności znajdują się na okręgu danym. Należy: 1) obliczyć pole części wewnętrznej koła danego, zawartej pomiędzy łukami wewnętrznemi; 2) nakreśliwszy okrąg współśrodkowy styczny do tych łuków, wyznaczyć stosunek pola koła nowego do pola koła danego.

849. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $AC=$ $=15$ cm, a przyprostokątna $BC=8$ cm. W trójkącie tym poprowadzono: $CD\perp AB$; $DE\perp AC$; $EF\perp AB$; $FG\perp AC$ i t. d. Do jakiej granicy dąży długość linji łamanej $BCDEFG$...?

850*. Dowieść, że 1) jeżeli boki trójkąta prostokątnego tworzą postęp arytmetyczny, to stosują się one do siebie, jak $3:4:5$. 2) Jeżeli boki trójkąta prostokątnego tworzą postęp geometryczny, to wysokość dzieli przeciwprostokątną w stosunku średnim i skrajnym (przyczem część większa równa się przyprostokątnej mniejszej).

851*. 1) Suma dwóch liczb dodatnich jest stała i równa się $2a$. Dowieść, że iloczyn tych liczb jest największy wtedy, gdy są one równe.

2) Iloczyn dwóch liczb dodatnich jest stały i równa się c^2. Dowieść, że suma tych liczb jest najmniejsza wtedy, gdy są one równe.

852. 1) Na cięciwie danej w kole znaleźć punkt, którego potęga jest największa.

2) Przez punkt dany wewnątrz okręgu przeprowadzić cięciwę najkrótszą.

853. 1) Wyznaczyć pole największego z prostokątów, mających obwody równe.

2) Który z prostokątów, mających pola równe, posiada obwód najmniejszy?

854. 1) Znaleźć promień wycinka kołowego, który, posiadając obwód dany $2p$, posiada też pole największe.

2) Znaleźć promień wycinka kołowego, który, mając pole dane Q, posiada obwód najmniejszy.

855. 1) Dowieść, że iloczyn trzech liczb dodatnich, posiadających sumę stałą, jest największy, gdy te liczby są równe.

2) Dowieść, że suma trzech liczb dodatnich, posiadających iloczyn stały, jest najmniejsza, gdy te liczby są równe.

856. 1) Który z trójkątów, posiadających obwody równe, jest największy?

2) Który z trójkątów, posiadających pola równe, posiada obwód najmniejszy?

857. 1) Obliczyć pole największego z trójkątów, posiadających kąt dany A oraz sumę boków, kąt ten obejmujących, daną $2c$.

2) W zadaniu poprzedniem położyć: a) $A = 60^0$; b) $A = 90^0$; c) $A = 120^0$.

858*. W trójkąt równoramienny, w którym podstawa $= 2a$ i wysokość $= h$, wpisać prostokąt o polu największem.

859*. W półkole o promieniu r wpisać trójkąt największy w ten sposób, ażeby jego wierzchołek znajdował się w środku średnicy.

860. 1) W koło o promieniu r wpisać prostokąt o polu największem.

2) W koło o promieniu r wpisać prostokąt o obwodzie największym.

861*. 1) Który z trójkątów, posiadających podstawę daną $2a$ i sumę pozostałych boków daną $2b$, posiada wysokość największą?

2) Wskazać największy z trójkątów, posiadających podstawy równe i obwody równe.

862*. W równoległoboku $ABCD$ jest $AB = a$, $AD = b$ oraz wysokość $= c$. Przez wierzchołek C przeciągnięto linję EF, przecinającą przedłużenia odpowiednich boków w ten sposób, że powstały przytem trójkąt AFE jest najmniejszy z możliwych. Obliczyć pole tego trójkąta.

863*. W trójkącie ABC są dane: bok b, podstawa c i wysokość h. Linja DE odcina od tego trójkąta trójkąt ADE, którego pole stanowi $\frac{1}{n}$ pola trójkąta danego; przy jakiem położeniu długość odcinka DE będzie najmniejszą?

864*. W półkole o promieniu r wpisać trapez o obwodzie największym.

865*. 1) W koło o promieniu r wpisać trójkąt prostokątny największy.

2) W koło o promieniu r wpisać trójkąt prostokątny o obwodzie największym.

866. Na danej prostej znaleźć punkt, którego suma kwadratów odległości od dwóch punktów danych jest najmniejsza.

867. Różnica wysokości 2 słupów pionowych wynosi b, a odległość pomiędzy niemi równa się a. U wierzchołków tych słupów umocowano końce sznura długości c i na sznurze zawieszono ciężar na bloku. Wyznaczyć najniższe położenie, jakie może zająć ciężar, zsuwając się po sznurze pod wpływem siły ciężkości.

868*. 1) Na kole o promieniu r opisać trójkąty prostokątne — największy i najmniejszy.

2) Na kole o promieniu r opisać trójkąty prostokątne o obwodzie największym i najmniejszym.

869. Boki trójkąta podzielono w stosunku $m:n$ (idąc w jednym kierunku) i punkty podziału połączono. Dowieść, że najmniejszy ze wszystkich możliwych do otrzymania w ten sposób trójkątów wewnętrznych odpowiada wartości stosunku $\frac{m}{n} = 1$ i stanowi $^1/_4$ danego trójkąta. (Zob. zad. № 684).

870. W trójkąt wpisano równoległobok; bok równoległoboku stosuje się do boku trójkąta, na którym leży, jak $m:n$. Uważając stosunek $\frac{m}{n}$ za zmienny $(=z)$, należy:

1) dowieść przez porównanie pól, że największym jest równoległobok, dla którego jest $\frac{m}{n}=z=\frac{1}{2}$;

2) określić, w jakim przypadku obwód równoległoboku nie zależy od stosunku z.

871. W prostokąt wpisano równoległobok, którego boki są równoległe do przekątnych prostokąta i stosują się do siebie, jak $m:n$. Uważając $m:n=z$ za zmienne, należy dowieść, że największemu równoległobokowi odpowiada $z=1$, oraz że obwód równoległoboku nie zależy od z.

872. W równoległobok dany wpisano inny równoległobok w ten sposób, że wierzchołki wpisanego dzielą boki danego w stosunku $m:n$. Uważając $m:n=z$ za zmienne, dowieść przez porównanie pól, że najmniejszym jest równoległobok, którego wierzchołki dzielą boki danego na połowy.

ODPOWIEDZI.

1. 8 dm. **2.** 10 cm. **3.** 1) 30 cm, 50 cm, 70 cm; 2) 0,40 cm, 60 cm, 100 cm. **4.** 1) 30 jedn.; 2) 12 jedn. **5.** 1) 4 m 24 cm; 2) 4 cm. **6.** 68 cm. **7.** 4 cm 5 mm. **8.** $AB:BC=1:(m-1)$. **9.** 72 cm. **10.** 96 cm. **11.** 1) Tak; 2) tak; 3) nie. **12.** $\frac{(n-1)n}{2}$; 10; 15; 190. **13.** $\frac{(n-1)n}{2}$. **14.** 1) $\frac{10}{7}d$; 2) $\frac{2}{3}d$ i $\frac{4}{3}d$. **15.** $\frac{12}{7}d$. **16.** $\sphericalangle ACD=\frac{8}{5}d$; $\sphericalangle BCD=\frac{2}{5}d$. **17.** 1) $\frac{10}{9}d$ i $\frac{8}{9}d$; 2) $\frac{3}{4}d$ i $\frac{5}{4}d$. **18.** $\frac{3}{5}d$. **19.** Tak. **20.** Tak. **21.** $\frac{3}{16}d$. **22.** d. **23.** $\sphericalangle AOB=\frac{8}{5}d$; $\sphericalangle BOC=\frac{4}{5}d$. **24.** 1) $\frac{1}{3}d$, $\frac{4}{9}d$, $\frac{5}{9}d$ i $\frac{2}{3}d$; 2) Jest $CO\perp AE$ i $BO\perp OD$. **25.** $\frac{3}{5}d$, $\frac{3}{5}d$ i d. **26.** $\frac{1}{5}d$. **27.** Tworzą linję prostą. **28.** $\frac{19}{11}d$. **29.** $\frac{5}{3}d$. **30.** $\frac{2}{3}d$. **31.** $\frac{7}{9}d$. **32.** $\frac{13}{8}d$. **33.** $\sphericalangle COE=\sphericalangle DOF=\frac{2}{17}d$. **34.** 8 m, 20 m, 16 m i 32 m. **35.** Nie. **36.** 10 cm. **37.** a) $n-3$; b) $\frac{(n-3)n}{2}$; 35; 170; 275. **38.** $\frac{3m}{m-1}$; 6; 4. **39.** 2 m + 3; 4; 5; 7; 8. **40.** 3,5 cm. **41.** 10 cm. **42.** 1) Tak; 2) nie; 3) nie. **43.** 2 dm. **44.** Mniejszy. **46.** *Wskazówka* Zastosować własność łamanej wewnętrznej. **47.** 6 cm. **48.** 13 cm. **49.** 15 jedn. **50.** 10 cm. **51.** 1) 52 cm; 2) 28 cm. **52.** $AB=BC=10$, $AC=15$. **54.** $\frac{11}{16}d$. **55.** $\frac{9}{7}d$. **56.** 1) Nie. — Powiększyć o $\frac{1}{16}d$; 2) $\frac{2}{3}d$ i $\frac{4}{3}d$. **57.** $\frac{5}{8}d$. **58.** $\frac{11}{24}d$. **59.** $\frac{1}{3}d$, $\frac{2}{3}d$, d. **60.** $\frac{14}{19}d$. **61.** $\frac{5}{17}d$. **62.** 1) Każda = 18 cm; 2) 8 cm. **63.** 1) Rozwarty; 2) ostry; 3) prosty. **64.** $\frac{5}{14}d$. **65.** $\frac{8}{9}d$. **66.** Przy wierzchołku $\frac{6}{7}d$, przy podstawie $\frac{4}{7}d$. **67.** 12 cm. *Wskazówka.* Trójkąt prostokątny o kątach $\frac{2}{3}d$ i $\frac{1}{3}d$ jest połową (tr-ta) równobocznego. **68.** $A=\frac{4}{9}d$; $B=\frac{2}{3}d$; $C=\frac{8}{9}d$. **69.** Przy wierzchołku $\frac{3}{5}d$, przy podstawie $\frac{7}{10}d$. **70.** Przy wierzchołku $\frac{11}{8}d$, przy podstawie $\frac{5}{16}d$. **71.** Pod kątem prostym. **72.** $\frac{3}{2}d$. **73.** $\frac{3}{2}d$. **74.** $\frac{1}{2}d$. **75.** Przy wierzchołku $\frac{16}{15}d$, przy podstawie $\frac{7}{15}d$. **76.** 1) $\frac{4}{5}d$ i $\frac{3}{5}d$; 2) $\frac{6}{5}d$ i $\frac{2}{5}d$. **77.** $\frac{14}{9}d$. **79.** $\sphericalangle D=\frac{A}{2}$; $\sphericalangle E=\frac{C}{2}$; $\sphericalangle DBE=d+\frac{B}{2}$. **80.** $\frac{13}{12}d$.

81. Przy wierzchołku $\frac{22}{15}d$, przy podstawie $\frac{4}{15}d$. **82**. $\frac{11}{17}d$. **83**. $\frac{7}{9}d$. **84**. Tak. **85**. $10d$; $16d$; $46d$. **86**. Powiększy się o $10d$. **87**. 1) 17; 2) 26. **88**. 13. **89**. $2(m+1)$. **90**. $\frac{15}{11}d$, $\frac{21}{11}d$, $\frac{6}{11}d$ i $\frac{2}{11}d$. **91**. $\frac{11}{7}d$, $\frac{3}{7}d$, $\frac{11}{7}d$. **92**. $\frac{25}{22}d$ i $\frac{19}{22}d$. **93**. $CD = 9$ cm; $BC = AD = 6$ cm. **94**. 6 cm i 8 cm. **95**. $BE = 9$ jedn., $EC = 6$ jedn. **96**. 7 dm i 3 dm. **97**. 1) Nie; 2) nie; 3) tak. **98**. $2\frac{1}{2}$ m i $3\frac{1}{2}$ m. **99**. 48 cm. **100**. $\frac{6}{11}d$ i $\frac{16}{11}d$. **101**. 9 cm. **102**. $\frac{4}{5}d$. **103**. $\frac{5}{9}d$. **104**. 10 cm i 18 cm. **105**. 12 cm. **106**. 8 cm i 4 cm. **107**. 8 dm. **108**. $\frac{14}{17}d$ i $\frac{20}{17}d$. **109**. $\frac{8}{9}d$ i $\frac{10}{9}d$. **110**. $\frac{2}{3}d$ i $\frac{4}{3}d$. **111**. 28 cm. **112**. 25 dm i 10 dm. **113**. 8 cm i 6 cm. **114**. 4 cm i 8 cm. **115**. 16 dm. **116**. 13 jedn., 16 jedn., 19 jedn., 22 jedn. i 25 jedn. *Wskazówka*. Z początku dowieść (zapomocą rysunku pomocniczego), że równoległe na rysunku otrzymanym wzrastają jednostajnie. **117**. $A = \frac{4}{7}d$, $B = \frac{10}{7}d$, $C = \frac{9}{7}d$, $D = \frac{5}{7}d$. **118**. 8 dm. **119**. Nie. **120**. 4 dm. **121**. Bliżej podstawy większej. **122**. $AD = 12{,}5$ cm i $BC = 11{,}5$ cm. **123**. $AD = 3$ m, $BC = 2$ m. **124**. 6 cm. **125**. $\frac{9}{13}d$ i $\frac{17}{13}d$. **126**. $\frac{2}{3}d$ i $\frac{4}{3}d$. **127**. 15 dm i 9 dm. **128**. 1) 10 cm; 2) $(4b - a)$. **129**. 36 cm i 24 cm. **130**. 40 mm i 15 mm. **131**. 17 cm. **132**. $m + n$ i $m - n$. **133**. $BF = a$. *Wskazówka*. Przeprowadziwszy $CG \perp AD$ i $EH \parallel AD$, znajdujemy $BF = BH + HF = \frac{1}{2}GD + EH$ i t. d. *Ćwiczenie*. Równości BF i AD dowieść zapomocą rysunku, przedłużając FE do przecięcia z przedłużeniem BC. **134**. 1 m i 6 dm. **135**. 1 : 2. **136**. 24 cm, 32 cm i 48 cm. **137**. 5 dm i 4 dm; $\frac{5}{8}d$ i $\frac{11}{8}d$. **138**. 1) 5 cm i 25 cm; 2) 7 cm i 13 cm; 3) Spodek prostopadłej, spuszczonej ze środka okręgu na daną prostą. **139**. $\frac{b \pm a}{2}$ (dwa przypadki). **140**. 20 cm i 12 cm. **141**. 22 cm. **142**. 1) 18^0; 2) $22^0 30'$; 3) $2^0 48' 45''$; 4) 75^0; 5) $63^0 45'$; 6) $261^0 49' 5\frac{5}{11}''$. **143**. 1) 5^0; 2) $4^0 26' 40''$; 3) $21' 36''$; 4) $25^0 42' 51\frac{3}{7}''$; 5) $163^0 38' 10\frac{10}{11}''$. **144**. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{1}{900}$; 5) $\frac{1}{72000}$; 6) $\frac{5}{96}$; 7) $\frac{241}{43200}$; 8) $\frac{1}{2025}$; 9) $\frac{130337}{1296000}$. **145**. 1) 150^0; 2) $47^0 30'$; 3) 155^0. **146**. 1) 20^0; 2) $55^0 37'$; 3) $67^0 17' 22''$. **147**. 1) 43^0; 2) $153^0 23'$; 3) $125^0 59' 43''$. **148**. $7^0 30'$. **149**. $83^0 50' 33''$. **150**. $44^0 59' 27''$. **151**. 1) $31^0 39' 28''$; 2) 25^0 i 65^0. **152**. $37^0 29' 46{,}5''$. **153**. 1) $38^0 33' 44''$. 2) 70^0, 70^0 i 40^0; 20^0, 20^0 i 140^0; 20^0, 70^0 i 90^0. 3) 80^0 i 100^0. **154**. $67^0 30'$, $50^0 37' 30''$ i $61^0 52' 30''$. **155**. $53^0 20'$, $93^0 20'$, 80^0, $133^0 20'$. **156**. $157^0 30'$, $172^0 48'$, $167^0 8' 34\frac{2}{7}''$. **157**. 1) 52 cm; 2) 1 m. **158**. 5 dm. **159**. 12 cm. **160**. 7 cm. **161**. $77^0 59' 23''$. **162**. $105^0 14'$. **163**. $148^0 41' 51''$. **164**. $16^0 32' 17''$. **165**. a) $35^0 11' 30''$; $58^0 44'$; $157^0 50' 12''$; b) $154^0 20'$; $127^0 47'$; 73^0. **166**. $94^0 39' 30''$. **167**. $84^0 22' 30''$. **168**. $285^0 16' 34''$. **169**. $137^0 33' 51''$. **170**. $56^0 15'$ i $123^0 45'$. **171**. $105^0 48' 30''$ albo $36^0 11' 30''$ (dwa przypadki). **172**. $37^0 30'$. **173**. 95^0 i 120^0. **174**. $52^0 30'$, $82^0 30'$ i 45^0. **175**. 108^0. **177**. 40^0. **178**. 154^0. **179**. 50^0. **180**. $67^0 30'$. **181**. 84^0. **182**. $36^0 34' 30''$.

183. $48^0 51' 16''$. **184**. $79^0 12' 36''$. **185**. $78^0 45'$. **186**. 144^0. **188**. $150^0 27'$. **189**. $180^0 - \frac{m^0}{2}$. **190**. 80^0. **191**. 72^0. **192**. 150^0 i $75^0 30'$. **195**. 7^0. **196**. Sieczna i styczna leżą z różnych stron środka. **197**. $20^0 30' 42''$. **198**. $106^0 34' 23''$ i $253^0 25' 37''$. **199**. $33^0 20'$. **200**. 105^0. **201**. Powiększy się o m^0. **202**. $31^0 12' 26''$. **203**. 100^0. **204**. 18^0. **205**. 1) 60^0; 2) $2a^0$. **206**. $34^0 54' 2''$. **207**. $\smile AMB = m^0 + n^0$. **208**. $\smile ANB = m^0 - n^0$. **209**. $\smile AD = 74^0 48'$; $\smile DE = 15^0 12'$. **210**. 45^0. *Wskazówka*. Połączyć B i D. **211**. $110^0 52'$. **212**. $\angle A = 74^0$, $\angle C = 106^0$, $\angle AOD = 148^0$; kąt pomiędzy przekątnemi $= 48^0$. **213**. 1) 40^0; 2) 36^0. **214**. $45^0 + m^0$ i $45^0 - m^0$. **215**. $55^0 19'$ albo $34^0 41'$ (dwa przypadki). **216**. 6 : 5. **217**. $p - r$. **218**. Odcinki przy wierzchołkach A, B i C są odpowiednio równe; $p - a$, $p - b$ i $p - c$. **219**. $25^0 10'$, $154^0 50'$, $25^0 10'$, $154^0 50'$. **220**. 143^0, 37^0, 143^0 i 37^0. **221**. Zewnętrzne. **222**. 3 cm. **223**. 25 cm. **224**. $B = 90^0$; $C = 109^0 36' 18''$; $D = 90^0$. **225**. 1) Tak; 2) nie. **226**. $\frac{R}{3}$. **227**. 81^0. **229**. $\angle BAC = 110^0$; $\angle BCA = 30^0$; $\angle DAC = 80^0$; $\angle DCA = 60^0$. *Wskazówka*. Należy skorzystać z okręgu opisanego. **230**. 7 cm i 5 cm. **231**. 1) Styczność zewnętrzna; 2) jeden wewnątrz drugiego; 3) jeden zewnątrz drugiego; 4) przecinają się. **232**. 9 cm i 7 cm. **233**. 16 cm. **234**. 6 cm. **235**. 14 dm, 6 dm i 2 dm. **236**. 9 cm. **237**. $R - r$. **238**. 90^0. **239**. 60^0. **240**. 1 : 3. *Wskazówka*. Łączymy środki. Prowadzimy promienie do stycznej zewnętrznej i ze środka mniejszego okręgu — prostą równoległą do stycznej zewnętrznej. Wówczas z otrzymanego tr-ta znajdujemy: $(R - r) : (R + r) = 1 : 2$. **241**. 9 cm i 3 cm. **242**. 5 dm. **243**. 145^0. *Wskazówka*. Przeprowadzić cięciwę $BF \parallel AD$. **244**. 70^0. **245**. 1) 15 cm, 2) 9 jedn., 3) 22 dm. **246**. 1) 12 dm; 2) 18 cm; 3) 3,4 m. **247**. 1) $BM = 3$ dm, $BN = 7$ dm; 2) 15 dm; 3) 3,75 jedn.; 4) 12 cm. **248**. 1) Tak; 2) tak; 3) nie. **249**. 33 cm. **250**. 10 cm i 35 cm albo 35 cm i 10 cm. **251**. $AM = 12$ m; $MC = 9$ m. **252**. 1) $a \cdot \frac{n(p+q)}{q(m+n)}$. *Wskazówka*. Przeprowadzić $FG \parallel EA$; 2) 16 cm; 4) $\frac{l}{k+1}$. **253**. 1) $AD = 8$, $DC = 12$; 2) 10 dm; 3) 18 dm; 4) $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm; 5) $2\frac{1}{2}$ cm. **255**. 10 cm. **256**. 1) 9 cm; 2) 16 dm; 3) 12 dm. **257**. 1) Tak; 2) nie; 3) nie; 4) tak; **258**. $BE = 7$ cm, $EC = 5$ cm. **259**. $AB : AC = 6 : 5$. **260**. 39 cm i 65 cm. **261**. 8. **262**. 50 cm. **263**. Podstawa $= 16$ cm, ramię $= 20$ cm. **264**. $BE = 10$, $EC = 14$. **265**. $\frac{b}{a+c}$. **266**. $AE = 6$ cm; $EC = 4$ cm;

$DE=6$ cm. **267.** $\frac{ab}{a+b}$. *Wskazówka.* Najpierw należy dowieść, że $MN \parallel AC$ i że $MN=MA=NC$. **268.** 9 cm i 12 cm. **269.** 20 dm i 24 dm. **270.** 10 cm, 25 cm i 20 cm. **271.** 1) $c=8$, $b_1=35$; 2) $c=20$; 3) $a=27$. **272.** $DF=15$ cm, $AC=24$ cm i $EF=18$ cm. **273.** 13,6 jedn. **274** $AC=30$ cm; $A_1C_1=12$ cm. **275.** $AC=20$ m, $EF=15$ m. **276.** 1) Tak; 2) tak; 3) nie. (Jak należy zmienić mniejszy bok drugiego tr-ta, ażeby otrzymać podobieństwo?). **277.** 1) Nie; 2) tak. **278.** 1) Nie. **279.** 26. **280.** 1) 15 cm, 30 cm i 37,5 cm; 2) 5,5 m i 6,5 m. **281.** 1) 14, 2) 6 dm. **282.** 1) $AD=4$ cm; 2) 27 : 28. **283.** 25 cm. **284.** 1) 1 m; 2) 24 cm. **285.** $\frac{bc}{a+c}$. **286.** $BC=12$ cm, $BD:BA=3:4$. **287.** $AD=1$ m; $DC=3$ m. **288.** 1) $AB=20$ cm **289.** $BF=28$ cm; $BG=16$ cm. **290.** $OB=15$ cm; $OD=12$ cm. **291.** $BC=18$ cm i $AD=40$ cm; $AO:OC=20:9$. **292.** $AB=30$, $AD=40$. **293.** 18 cm. **294.** 2 m. **295.** 300 m. **296.** $\frac{a(m-n)}{n}$. **297.** $\frac{bc}{a+2c}$. **298.** 12 cm i 10 cm. *Wskazówka* (do obliczania). Oznaczyć boki poszukiwane przez $6x$ i $5x$. **299.** $\frac{bc}{b+c}$. **300.** $\sqrt{p\cdot q}$. **301.** $\frac{ah}{a+h}$. **302.** 10 cm i 18 cm. *Wskazówka* (do obliczania). Boki poszukiwane oznaczyć przez $5x$ i $9x$. (Tak samo należy postępować i w innych wypadkach, gdy mamy dany stosunek niewiadomych). **303.** 12 jedn. **304.** $\frac{ah}{a+2h}$. **305.** $CD=3$ cm; $BD=9$ cm. **306.** $AD=6$ cm; $BE=8$ cm. **307.** 1) $\frac{ph_1}{h_1+h_2}$, $\frac{ph_2}{h_1+h_2}$; 2) 1 m. **308.** 14 jedn. i 10 jedn. **309.** $\sqrt{2ar}$. **310.** 26 cm i 10 cm. **311.** $\frac{ab}{a+b}$. **312.** 16 cm. **313.** $\frac{lm}{l+m}$. **314.** 1) $\frac{an+bm}{m+n}$. *Wskazówka.* Z punktu B przeprowadzić prostą $\parallel CD$. 2) Każdy z odcinków skrajnych $=\frac{d}{a}(a-m)$, odcinek środkowy $=\frac{m}{a}(b+d)-d$; środkowy = sumie skrajnych, gdy $m=\frac{3ad}{b+3d}$; EF przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych, gdy $m=\frac{ad}{b+d}$. 3) Wartości kolejne odcinków są:

$\frac{am}{b}$, $a\left(1-\frac{m}{b}-\frac{m}{d}\right)$, $\frac{am}{d}$; środkowy = sumie skrajnych, gdy $m=\frac{bd}{2(b+d)}$; EF przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych, gdy $m=\frac{bd}{b+d}$; punkt przecięcia leży pomiędzy AB i EF, gdy $m>\frac{bd}{b+d}$. **315.** 68 dm i 80 dm. **316.** $MN=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$. *Wskazówka.* Przypuszczając, że $MN=x$, odnajdujemy z początku $BN=\frac{ax}{b}$. **317.** 20 m. **318.** $OE=6$ cm; $OD=8$ cm. **319.** 42 cm. **320.** $\frac{ar}{a+2r}$. **321.** Przedłużenia boków a i c są odpowiednio równe $\frac{b(ba+dc)}{d^2-b^2}$ i $\frac{b(bc+da)}{d^2-b^2}$. **322.** 30 cm, 24 cm, 18 cm, 36 cm. **323.** 18 m, 9 m, 12 m i 36 m. **324.** 8, 12, 16, 20. **325.** $A_1C_1=18$ cm, $A_1D_1=21$ cm. **326.** 100 m i 40 m. **327.** 10 cm i 15 cm. **328.** 80 cm. **329.** 4 m. **330.** $BE=\frac{a^2}{b}$. **331.** $BE=\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{b^2-4a^2})$. Warunek możliwości $a\leq\frac{b}{2}$; gdy $a=\frac{b}{2}$ — jedno rozwiązanie, wtedy prosta EF dzieli dany równoległobok na dwa równoległoboki równe, gdy $a<\frac{b}{2}$ — dwa rozwiązania: omów położenie prostej EF w każdym z tych dwóch przypadków. **332.** 1) 37 cm; 2) 65 cm; 3) 41 dm; 4) 109; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $\frac{25}{16}$; 7) 17; 8) $\sqrt{61}=7,81...$ **333.** 1) 161; 2) 260; 3) 24; 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51}=7,14...$ **334.** 3; 4; 5.

	a	b	c	p	q	h
335. 1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
336. 1)	(100)	75	(125)	80	45	60
2)	156	(65)	(169)	144	25	60
3)	(600)	175	(625)	576	49	168

	a	b	c	p	q	h
337. 1)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
2)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
338. 1)	21	20	(29)	$(15\frac{6}{29})$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
2)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
339. 1)	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{6}$	$(\frac{3}{2})$	$(\frac{8}{3})$	2
2)	$\sqrt{40}$	$\sqrt{360}$	20	(2)	(18)	6
340. 1)	(136)	225	289	64	225	(120)
2)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$(8\frac{32}{41})$
341. 1)	6,25	$21\frac{3}{7}$	$22\frac{9}{28}$	(1,75)	$20\frac{4}{7}$	(6)
2)	$\sqrt{20}$	$\sqrt{5}$	5	4	(1)	(2)
342. 1)	(45)	60	75	27	(48)	36
2)	$\sqrt{2\sqrt{26}+2}$	(5)	$\sqrt{26}+1$	(2)	$\sqrt{26}-1$	$\sqrt{2\sqrt{26}-2}$
343. 1)	10 $7\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$ 10	$(12\frac{1}{2})$	8 $4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$ 8	(6)
2)	$p = 4 \pm 3i$ *). (Zadanie niewykonalne. Dowieść tego bez obliczania).					

344. 1) 50 cm i 72 cm; 2) 52 dm. **345.** 18 dm i 98 dm. **346.** $a = \sqrt{48}$; $b = 6$. **347.** $a = 35$; $b = 84$. **348.** $a = 240$; $c = 267$. **349.** $c = 12$. **350.** $c = 39$. **351.** 1) $c = 37$; $a = 12$; 2) $c = 7\frac{1}{4}$; $b = 5\frac{1}{4}$. **352.** 1) $a_1 = 11$, $b_1 = 60$, $a_2 = 60$, $b_2 = 11$; 2) $a = 20$, $b = 99$. **353.** $p = 50$; $q = 18$. **354.** 2) $c = 50$; $a_1 = 30$, $a_2 = 40$; $b_1 = 40$, $b_2 = 30$. *Wskazówka.* Podnieść obydwie strony równania do kwadratu. 3) $c = 13$; $a_1 = 5$, $a_2 = 12$; $b_1 = 12$, $b_2 = 5$. **356.** 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 109 cm. **357.** 1) $a\sqrt{2}$, 2) $2(\sqrt{2}+1)$ cm. **358.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$;

*) $i = \sqrt{-1}$.

2) 32 cm i 60 cm. **359.** 1) 41 cm; 2) 1 m; 3) 3 m i 4 m. **360.** 1) 15 dm; 2) Podstawa $= 240$, ramię $= 125$; 3) $2\sqrt{2}$ cm; 4) $a\sqrt{3}$. **361.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 2) $2m(2 + \sqrt{3})$; 3) $2\sqrt{3}$ i $4\sqrt{3}$ dm. **362.** 1) 25 albo 11; 2) 29 cm; 3) 40. **363.** 1) 37 cm; 2) 3 dm i 4 dm. **364.** 1) 24 cm; 2) 54 i 36 cm. **366.** $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. **367.** 1) 39 dm; 2) 120; 3) 14 cm albo 4 cm. **368.** 1) cięciwa $= 2\sqrt{r^2 - x^2}$; gdy $x = o$, cięciwa $= 2r$; gdy $x = r$, cięciwa $= o$; 2) $\frac{a^2 + 4h^2}{8h}$. **369.** 9 cm albo 39 cm. **370.** $42\frac{1}{2}$ cm. **371.** 1) 77 cm; 2) 61; 3) odległość szukana $= \frac{2r}{l}\sqrt{l^2 - r^2} = 2r\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}$; gdy l dąży do nieskończoności, odległość dąży do $2r$ (co to znaczy?). **372.** $\sqrt{2Rr}$. **373.** 1) 40 cm; 3) styczna zewnętrzna $x = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$, styczna wewnętrzna $y = \sqrt{l^2 - (R + r)^2}$; a) są dwie styczne różnej długości, b) $x = 2\sqrt{Rr}$, $y = o$ (co to znaczy?), c) jest tylko styczna zewnętrzna, d) jest tylko styczna $x = o$ (co to znaczy?), e) niema żadnej stycznej. **374.** 1) 13 m; 2) Długość siecznej $= 5 + \sqrt{25 - m^2}$. *Wskazówka.* Oznaczając część wewnętrzną siecznej przez $2y$, a jej część zewnętrzną przez x, otrzymamy: $(2y + x)x = m^2$, skąd $x = -y + \sqrt{y^2 + m^2}$; z drugiej strony znajdziemy: $y^2 + m^2 = 25$, tak iż $y = \sqrt{25 - m^2}$ i t. d. Gdy $m = o$, sieczna $= 10 (= 2r)$; gdy m rośnie od 0 do 5, sieczna maleje od 10 do 5; gdy m przekroczy długość promienia (5), sieczna przestanie przecinać koło—jej długość będzie *urojoną*. **375.** 73 cm. **376.** 25 m i 7 m. **377.** $AC = 10$; $BC = 20$. **378.** 1) 3 cm; 2) Mniejsza przyprostokątna $=$ większej części przeciwprostokątnej $= \frac{c}{2}(\sqrt{5} - 1)$; większa przyprostokątna $= \frac{c}{2}\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}$. Sprawdzić, że stosunek $\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} : (\sqrt{5} - 1) > 1$. **379.** $7\frac{9}{17}$. **380.** 175 cm i 600 cm. **381.** 20 dm. **382.** 1 : 4. **383.** 49 : 81. **384.** 21 cm i 28 cm. **385.** $a(\sqrt{2} - 1)$ i $a(2 - \sqrt{2})$. **386.** $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ i $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. **387.** 1 m. **388.** 15. **389.** 5 m. **390.** 1) 10 cm; 2) $7\frac{1}{2}$ cm. **391.** 18. **392.** 1) 24 cm. Podstawa $= \sqrt{28,8}$ cm, ramię $= \sqrt{16,2}$ cm; 3) 13,44. **393.** 1) $9\frac{1}{15}$ dm; 2) $\frac{4r}{\sqrt{5}}$;

3) $AE=\frac{2r+p}{5r+4p}\cdot 2\sqrt{r(5r+4p)}$; gdy $p=r$, $AE=2r$; gdy p maleje do O, AE maleje do wartości $\frac{4r}{\sqrt{5}}$; gdy p maleje w dalszym ciągu do $-\frac{r}{2}$, AE dalej maleje aż do wartości $r\sqrt{3}$; przy dalszem zmniejszaniu się p aż do $-r$, AE wzrasta aż do $2r$. **394.** 15 cm. **395.** 1) 65; 2) Cięciwa $=\frac{2r}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}}$; gdy $a=r$, cięciwa $=\frac{r}{\sqrt{2}}$, gdy a dąży od r do o, cięciwa zmniejsza się i dąży do o; gdy a dąży od r do ∞, cięciwa rośnie i dąży do $2r$; gdy $a=\frac{r}{3}$, cięciwa $=r$. **396.** 35 cm. *Wskazówka.* Przeprowadzić linję środkową i wysokość przy ramieniu pochyłem. **397.** $AE:EC=16:25$. **398.** $DE=36$ cm; $DF=48$ cm. **399.** 18 cm i 80 cm. **400.** 1) 37 m i $\sqrt{769}=27{,}7$ m; 2) 4 : 5. **401.** $\frac{a}{5}$. **402.** $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$. **403.** $\frac{a-b}{2}\sqrt{2}$. **404.** 18,5; 2) promień $=\sqrt{\frac{b^2k^2-a^2}{k^2-1}}$; gdy k, będąc większe od 1, maleje i dąży do 1, to promień dąży do ∞. Znaczy to, że gdy, nie zmieniając długości cięciw, przesuwamy je w ten sposób, by ich odległości od środka coraz mniej się od siebie różniły, to jednocześnie musimy wciąż powiększać promień koła, by okrąg mógł przechodzić przez końce obu cięciw. **405.** *Wskazówka.* Oznaczając cięciwy dane przez AB i CD, prowadzimy cięciwy AC i BD (lub BC i AD) i bierzemy pod uwagę sumę odpowiadających im łuków. **406.** 1) $3\frac{1}{8}$ cm; 2) 16,9 m. **407.** 6,72 m. **408.** 6. *Wskazówka.* Odcinki przeciwprostokątnej, utworzone przez punkt styczności, równają się przylegającym do nich odcinkom przyprostokątnych. **409.** 38 dm, 22 dm. **410.** 25 cm. *Wskazówka. 1-szy sposób.* Posiłkowa niewiadoma — odległość od środka do cięciwy mniejszej. *2-gi sposób.* Połączywszy środki cięciw danych i ich końce, znajdujemy odległość od środka koła do otrzymanej cięciwy bocznej, postępując tak, jak w № 396. **411.** $20\frac{1}{24}$. *Wskazówka.* Patrz № 410. **412.** 30 cm. **413.** 18 cm i 32 cm. **414.** Podstawy: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ i $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; ramię $=\frac{r(m+n)}{\sqrt{mn}}$. **415.** 20 dm. **416.** 1. **417.** $CA=\frac{m^2+n^2}{m}=39$;

$CB=\frac{m^2+n^2}{m}=26$. **418.** $a+b-\sqrt{2ab}$. **419.** $r=\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{2ab})$. Czy zawsze zadanie jest możebne? **420.** 27 cm i 64 cm. **421.** *Wskazówka. 1-szy sposób.* Niech AB będzie wspólną styczną zewnętrzną i C punktem styczności kół. Przeprowadziwszy wspólną styczną wewnętrzną, przecinającą AB w punkcie D i połączywszy D z obu środkami oraz środki, znajdziemy, iż CD jest średnią proporcjonalną pomiędzy promieniami, a $AB=2CD$. *2-gi sposób.* Nakreśliwszy rysunek odpowiedni, wyznaczamy AB^2 (przy pomocy R i r) podług twierdzenia Pytagorasa. **422.** 65 cm. **423.** $AB=\sqrt{a(a+b)}$; $CD=\sqrt{b(a+b)}$. **424.** 1) 7; 2) $\sqrt{7}$; 3) 16; 4) $\sqrt{12}$. **425.** 1) Rozwartokątny; 2) prostokątny; 3) ostrokątny; 4) ostrokątny; 5) rozwartokątny. **426.** 1) 3 lub 4 lub 5; 2) 6 lub 7; 3) 2; 3; 4. *Wskazówka* (do punktu 3). Oznaczyć poszukiwane trzy boki przez $x-1$, x i $x+1$. **427.** 1) $p=5$; $q=9$; $h=12$; 2) $p=35$; $q=5$; $h=12$; 3) $p=20$; $q=8$; $h=15$; 4) $p=1\frac{3}{8}$; $q=2\frac{5}{8}$; $h=\frac{3}{8}\sqrt{15}$. **428.** 1) $AD=6\frac{3}{4}$; $CE=9$. *Wskazówka.* Przeprowadzić AE i CD. 2) $5\frac{1}{4}$ cm. **429.** 1) 7 cm; 2) 13 m; 3) 73 jedn. **430.** 1) 7 cm; 2) 13 cm; 3) 31 jedn. **431.** 1) $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$; 2) 5. **432.** $\sqrt{\frac{b^2-a^2}{n^2-m^2}}$. **433.** 13; 14; 15. **434.** 9 cm i 24 cm. **435.** 5 dm albo 3 dm. **436.** Ramiona 7 i 15; wysokość $\frac{105\sqrt{3}}{26}$. **437.** 20 cm. **438.** $AC=a$; $AD=a(\sqrt{2}+1)$; $CD=a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **439.** $x^2=2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}$; $(x=30)$. **441.** 1) 13 cm; 2) 5,6. **442.** $\sqrt{a^2+(a+b)^2}$. **443.** 13. **444.** 12 dm i 8 dm. **445.** $BD=BE=14$ cm; $DE=16{,}8$ cm. **446.** $CD=56$; $BD=25$. *Wskazówka.* Przeprowadzić $BE\perp AC$. **447.** $CE=52$. *Wskazówka.* Przeprowadzić $BE\perp AC$ i skorzystać z podobieństwa trójkątów. **448.** $AD=8$. *Wskazówka.* Przeprowadzić $BE\perp AC$ i wyznaczyć najpierw AE i BE. **449.** 1) 20 cm i 30 cm; 2) 10 m i 15 m. **450.** 1) 7 cm i 11 cm; 2) Boki 4 jedn. i 7 jedn.; przekątne 7 jedn. i 9 jedn. **451.** 24 cm. **452.** 1) 7 dm; 2) 6. **453.** 1) 12; 20; $\sqrt{544}$; 2) 15; 17; 39; 3) 2; 4; $\sqrt{23{,}4}$; $\sqrt{13{,}6}$. **454.** 15 dm i 25 dm. **457.** *Wskazówka.* Środki boków 4-kąta połączyć jeszcze kolejno. **459.** 1) 8 cm; 2) 30 m. **460.** 45 cm i 80 cm. **461.** 82,368 cm. **462.** 51 cm. **463.** 39. **464.** Jeżeli cięciwy są po obu stronach środka koła, to $BC=46{,}8$ dm; jeżeli cięciwy są z jednej strony środka koła, to $BC=30$ dm. *Wskazówka.* Przeprowadzić średnicę AD i cięciwy BD i DC. **465.** 6 cm. *Wskazówka.* Zużytkować okrąg, który można opisać na 4-kącie $ABCD$. **466.** 1) 15 jedn.; 2) Druga styczna $=R$;

gdy styczne leżą po jednej stronie OA, linja, łącząca punkty styczności, jest podstawą równoramiennego trapezu i równa się $\frac{R^2-r^2}{\sqrt{R^2+r^2}}$; gdy styczne leżą po obu stronach OA, linja, łącząca punkty styczności, jest przekątną prostokąta i równa się $OA = \sqrt{R^2+r^2}$. **467**. $5\frac{4}{7}$. **468**. 21. **469**. 1) 6, 12 dm, 1 m; 2) 16 cm; 3) $AB^2 = -x^2 + 2rx$; badając tę funkcję, znajdziemy łatwo, że $AB = o$, gdy $x = o$ lub $2r$, że AB otrzyma największą wartość przy $x = r$, że przy $x < o$ lub $x > 2r$ jest AB urojone, bo wypadnie $AB^2 < o$. **470**. 1) Wewnątrz koła; 2) na okręgu; 3) zewnątrz koła. **471**. 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 lub 45. **472**. 1) 30 cm; 2) 40 cm; 3) 21 dm i 29 dm. **474**. 1) 16 cm; 2) 6; 3) 10 m. **475**. 1) 8; 2) 18 m; 3) 14. **476**. 1) 7 cm; 2) $r(\sqrt{5}-1)$. **477**. 12 cm. **478**. Nie. **479**. Zmniejszył się $2\frac{1}{2}$ raza. **480**. 1) 24 cm; 2) 33 m. **481**. 24 dm i 8 dm. **482**. 1) Powiększyła się 3 razy; 2) największa potęga $= a^2$. **483**. 1) 4 cm; 2) 20; 3) $AB = 35$ m i $AC = 15$ m. **484**. 1) 8 jedn.; 2) stosunek $= \frac{64}{z^2-49}$, musi on być dodatni i większy od 1; stąd otrzymujemy dla z granice: $7 < z \leq \sqrt{113}$; dalej znajdziemy $z = 9$ cm, $\sqrt{65}$ cm i t. d. **485**. 1) 9 dm; 2) 1,5 jedn.; 3) 25. **486**. mx i nx, gdzie $x = \frac{am-bn}{n^2-m^2}$. **487**. 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. **488**. 21 cm. **489**. 1) $1\frac{1}{2}$ raza; 2) k^2. **491**. 1) $x = (a+b)\frac{a}{c} - c$; gdy $a(a+b) = c^2$, gdy $a(a+b) > c^2$, gdy $a(a+b) < c^2$; 2) drugi punkt przecięcia. **492**. 1) 3; 2) 18 cm; 3) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. **493**. 1) 17 cm; 2) 13 cm. **494**. 1) 10 cm; 2) $\frac{a}{2}$. **495**. 18 jedn. **496**. 1,2 m; 3,6 m. **497**. 1) 18 cm i 12 cm; 2) 9 cm i 6 cm lub $12\frac{1}{2}$ cm i $2\frac{1}{2}$ cm. **498**. Część większa $= \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$; część mniejsza $= \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$. **499**. Jeżeli cała wielkość $= a$, to część większa $= \frac{\sqrt{5}-1}{2} a = 0{,}618...\, a$; a to różni się od 0,625 a mniej niż o 0,007 a. **500**. $\frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$. **502**. $2r\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **503**. Rzut $= \pm\sqrt{-b^2+2ab}$, wyrażenie pod pierwiastkiem musi być dodatnie, stąd granice

dla b: $o \leq b \leq 2a$; największy rzut $= \pm a$, gdy $b = a$; rzut zmienia się w granicach $o \leq |\text{rzut}| \leq a$; (6 jedn.). **504**. $\frac{2}{5} r$. **505**. 1) 15; 2) 8 cm; 3) 9,375 m. **506**. 25 cm; 8 cm; 15 cm. **507**. $\frac{a}{r}\sqrt{4r^2-a^2}$. (Wygodnie jest zastosować również twierdzenie Ptolemeusza). Położywszy $a = 2r$, otrzymamy dla cięciwy wartość 0 — wytłumaczyć to. **508**. 9 cm. **509**. $\sqrt{2ar}$. **510**. $r(\sqrt{5}-1)$. **511**. $\frac{3}{2} r$. **512**. *Wskazówka.* Najpierw wyznaczyć MC^2 z tr-ta MCA i MD^2 z tr-ta MDB. **513**. 6 dm. **514**. $\frac{a}{5}$. **515**. $\frac{r}{\sqrt{5}}$. **516**. 10 cm. **517**. $2 \cdot \frac{a^2+b(b-c)}{\sqrt{a^2+(b-c)^2}}$; 1) $29\frac{1}{13}$; 2) $2 \cdot \frac{2a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. **518**. 32 cm. *Wskazówka.* Punkt C połączyć ze środkiem. **519**. $\frac{a}{5}$. *Wskazówka.* Przedłużyć bok drugiego kwadratu (przez kwadrat dany) do przecięcia z okręgiem. **520**. $MA = \frac{m(ma-nb)}{m^2-n^2}$; $MB = \frac{n(mb-na)}{m^2-n^2}$; $MC = \frac{m(mb-na)}{m^2-n^2}$; $MD = \frac{n(ma-nb)}{m^2-n^2}$. **521**. $MB = \frac{m(ma-nb)}{m^2-n^2}$; $MD = \frac{n(ma-nb)}{m^2-n^2}$. **522**. $\frac{2}{3}r$. **523**. $AE = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$. **524**. $DA : DB = 3 : 2$. **525**. 11,2. *Wskazówka.* Niech AD będzie odcinkiem zewnętrznym siecznej. Najpierw znajdujemy, że $BC : DC = 4 : 3$, a następnie zużytkowujemy tr-t BCD. **526**. $\frac{amn}{m^2-n^2}$. *Wskazówka.* Można przypuścić, że $DA = mx$ i $DC = nx$. (Dlaczego?). **527**. $180^0 - \frac{360^0}{n}$; 60^0; 90^0; 108^0; 120^0; 135^0; 144^0; 150^0; $165^0 36'$. **529**. $2m\sqrt{3}$. **530**. 1) $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ lub $\frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. *Wskazówka.* Drugie wyrażenie dla a_{12} można otrzymać albo z pierwszego[1]), albo bezpośrednio—zapomocą twierdzenia Ptolemeusza (od środka C półokręgu ACB odcinamy $\smile CO = 30^0$ i, poprowadziwszy cięciwę CD, łączymy jej końce z końcami średnicy AB). **531**. 1) $\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

---

[1]) Podług wzoru $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, gdzie $c = \sqrt{a^2-b}$.

2) $\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{r}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; 3) $\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. **532.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$; 6) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{a}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. **533.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$; 5) $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; 6) $\frac{a}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. **534.** 1) $2k$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; 4) $k\sqrt{4-2\sqrt{2}}$; 5) $k\sqrt{2-\sqrt{0,8}}$; 6) $2k\sqrt{2-\sqrt{3}}=k(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **535.** 1) $2r\sqrt{3}$; 2) $2r$; 3) $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$; 4) $2r(\sqrt{2}-1)$; 5) $2r\sqrt{1-\sqrt{0,8}}$; 6) $2r(2-\sqrt{3})$. *Ćwiczenie.* Wyżej przytoczone wyrażenia otrzymują się podług wzoru $b_n : a_n = r : k$; lecz b_8 można łatwo otrzymać jeszcze drogą następującą: weźmiemy równoramienny trójkąt prostokątny ABC, w którym $AB=BC=r$, i poprowadzimy dwusieczną AD; wtedy $BD=\frac{1}{2}b_8$; ale BD otrzymamy, jeżeli podzielimy BC w stosunku $AB:AC$ lub $1:\sqrt{2}$, i t. d. W ten sam sposób można otrzymać i b_{12}, (biorąc trójkąt prostokątny o kącie 30^0). **536.** 1) $2a$; 2) $a\sqrt{3}$; 3) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; 4) $a\sqrt{4-2\sqrt{2}}$; 5) $a\sqrt{2-\sqrt{0,8}}$; 6) $2a\sqrt{2-\sqrt{3}}=a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. Jak objaśnić podobieństwo tych odpowiedzi do otrzymanych w № 534? **537.** 1) $r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; 2) $r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; 3) $\frac{r}{2}\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. **538.** $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. *Wskazówka.* Niech cięciwa $AB=a_5$. Przeprowadziwszy promienie OA i OB i w trójkącie OBA, prowadząc $BC\perp OA$, otrzymamy $a_5^2=2r^2-2r \cdot OC$, ale $OC=\frac{1}{2}a_{10}$ (prowadząc cięciwę $BD \parallel AO$ i promień $OE\perp OA$, zobaczymy, że $\smile BE=18^0$ i $OC=\frac{1}{2}BD$). *Ćwiczenie.* Zastosować sposób wskazany do obliczenia a_8 i a_{12}. **540a.** 1) $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2r$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2}+1)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **540b.** r, $r\sqrt{2}$,

$r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $2r$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $a(\sqrt{3}+1)$, $a\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$, $a(2+\sqrt{3})$, $2a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **541.** $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. *Wskazówka.* Zwrócić uwagę na kąt pomiędzy przekątnemi, wyprowadzonemi z jednego wierzchołka. **542.** $\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. *Wskazówka.* Koniec przekątnej połączyć z końcem średnicy, wyprowadzonej z tegoż wierzchołka. **543.** 1) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{r}{2}$. **544.** 1) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. **545.** 1) $\frac{a}{3}$; 2) $a(\sqrt{2}-1)$; 3) $a(2\sqrt{3}-3)$. **546.** 1) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **547.** 1) $\frac{a}{6}(3\pm\sqrt{3})$; 2) a. **549.** $\frac{a}{6}$. **550.** Nazywając *bokiem* gwiazdy odcinek zewnętrzny cięciwy, łączącej punkty podziału okręgu, otrzymamy: 1) $\frac{r\sqrt{3}}{3}$; 2) $r(\sqrt{2}-1)$. **551.** 1) $\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$; 2) $r\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 3) $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$. *Wskazówka.* Taki sam sposób, jak w № 538. **552.** $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$; $\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $2r$. **553.** *Wskazówka.* Zużytkować okrąg opisany (dla porównania kątów). **554.** $\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$. *Wskazówka.* Niech będą F i G punktami przecięcia przekątnej AC z przekątnemi BD i BE. Zapomocą trójkąta ABF o dwusiecznej BG przekonamy się, że bok poszukiwany FG jest równy części mniejszej boku a, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym. **555.** 1) $1:\sqrt{3}:2$; 2) $\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2+\sqrt{3}}$. *Wskazówka.* Wyrazić boki trójkąta jako cięciwy koła opisanego. **556.** $c(\sqrt{3}+1)$. **557.** $\frac{3}{5}h$. *Wskazówka.* Dopełnić łuk odcinka kołowego do okręgu i przeprowadzić średnicę, prostopadłą do cięciwy odcinka kołowego. **558.** 1) $r(3+2\sqrt{3})$; 2) $r(\sqrt{2}+1)$; 3) r; 4) $\frac{r}{\sqrt{5}}$. *Wskazówka.* Połączyć kolejno środki kół zewnętrznych. **560.** 1) 289 cm kw. 2) 6,25 m. kw.; 3) 25 jedn. kw. **561.** 1) 108 m; 2) 26 cm; 3) 1,073 . . . m. **562.** 1) $\frac{l^2}{2}$; 2) $2r^2$; 3) 2 razy. **563.** 1) Jeżeli

A_1 jest wierzchołkiem kwadratu wpisanego, znajdującym się na boku AB danego, to $AA_1 = \frac{1}{4}a$ lub $\frac{3}{4}a$; 2) $c^2(\sqrt{2} - 1)$. **564**. 1)40,32 dm kw.; 14 m kw.; 2) 6,4 m. **565**. 1) 8 jedn. i 18 jedn.; 2) 12 dm i 25 dm. **566**. Pole $= z\ (p - z)$; z zmieniać się może w granicach: $o \angle z \angle p$; największe pole $= \frac{p^2}{4}$ (wtedy prostokąt jest kwadratem o boku $\frac{p}{2}$). **567**. 1) 144 cm kw.; 2) pole $= -z^2 + lz$; granice dla z: $o \angle z \angle l$; największy prostokąt jest kwadratem o boku $z = \frac{l}{2}$, stanowi on połowę kwadratu danego; równe pola odpowiadają takim wartościom z, których suma jest równa l — np. gdy $z_1 = \frac{l}{4}$ i $z_2 = \frac{3}{4}\ l$ i t. p. **569**. 1) 818 cm; 2) połowa obwodu $p = z + \frac{Q}{z}$; przyjmując chwilowo p za stałą, znajdziemy $z = \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4Q})$; ponieważ musi być $p^2 - 4Q \geq o$, więc najmniejsza wartość $p = 2\sqrt{Q}$, ma to miejsce wtedy, gdy prostokąt jest kwadratem. **570**. 1) 288 cm kw.; 2) 18 m kw. **571**. 30 cm. **572**. $\frac{phh_1}{h+h_1}$. **573**. 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. **574**. 202,8 dm kw. **575**. 14 m kw. **577**. 1) mn; 2) pole $= \frac{c}{h}\ (-z^2 + hz)$; dla z znajdziemy granice $o \angle z \angle h$; największe pole $= \frac{ch}{4}$; pola równe otrzymamy dla takich wartości z_1 i z_2, dla których jest $z_1 + z_2 = h$, np. gdy $z_1 = \frac{1}{3}h$, $z_2 = \frac{2}{3}h$ i t. p. **578**. 1 : 3. **579**. 1) mn; 2) pole $= \frac{l}{a}\ (a - z)z$; dla z mamy granice $o \angle z \angle a$; pole największe $= \frac{ab}{4}$; pola równe otrzymamy przy wartościach: $z_1 = \frac{m}{n}\,a$, $z_2 = \frac{n - m}{n}a$. **580**. Podstawa i wysokość: 9 jedn. i 7 jedn., albo 21 jedn. i 3 jedn. **581**. 40,32 dm kw. **582**. 1) 288 cm kw.; 2) 1 m kw.; 3) 5 jednostek kw. **583**. 1) 39 dm kw.; 2) 82 cm; 3) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **584**. 1) Tak; 2) nie; 3) tak. **585**. $\frac{c^2}{4}$. **586**. 1) 2688 cm kw.; 2) $\frac{1}{4}\ b\ \sqrt{4c^2 - b^2}$. **587**. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3\ Q\ \sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. **588**. 1) $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $3r^2\sqrt{3}$. **589**. 6 dm kw. **590**. 2250 jedn. kw. albo 522 jedn. kw. **591**. 1) $\frac{ab}{4}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$; 4) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. **592**. 48 cm i 55 cm. **593**. 12 cm lub 16 cm. **594**. 1) 1440 jedn. kw.; 2) 9,6 m. **595**. 1) $\sqrt{Q\,\frac{m^2 + n^2}{2mn}}$. *Wskazówka.* Oznaczyć połowy przekątnych przez mx i nx; 2) oznaczymy $\frac{m^2 + n^2}{mn} = t$ i, uważając chwilowo t za stałe, znajdziemy $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2 - 4})$; że zaś musi być $t^2 - 4 \geq o$, więc najmniejsza wartość $t = 2$. Stąd najmniejsza wartość boku $= \sqrt{\frac{q}{2} \cdot t} = \sqrt{q}$, zaś $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}t = 1$. **596**. 1) 84; 2) 60; 3) $10\sqrt{2}$; 4) $\frac{15}{4}\sqrt{3} = 6{,}49\ldots$; 5) 5,28; 6) $17\frac{1}{3}$; 7) 8; 8) $18\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$. **597**. 1) 2 m; 2) 112. **598**. 1) 130 dm, 125 dm i 15 dm; 2) 18 jedn.; 20 jedn. i 34 jedn. **599**. 144 cm kw. **600**. 30. **602**. 1) 8 cm; 2) stosunek $= \frac{z}{2a - z}$; przy zmianach z w granicach $o \leq z \leq a$ stosunek od o rośnie do 1; 3) pole części wspólnej $= \frac{2}{3}$ pola równoległoboku. **603**. 1224 jedn. kw. **604**. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1)$. **605**. 270 cm kw. *Wskazówka.* Przedłużymy daną środkową BD o długość $DE = BD$ i weźmiemy trójkąt BCE (lub BAE). **606**. $\frac{c^2}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 2}$. **607**. 1) 25 albo 39; 2) 14 albo 12; 3) 65. **608**. 75 cm kw. **609**. 36 jednostek kw. **610**. $a^2(3 + \sqrt{3})$. **611**. $2a^2(\sqrt{2} - 1)$. **612**. 6 cm. **613**. 14 m, 30 m, 40 m. **614**. 48 cm kw. **615**. 52 jedn. kw. **616**. 504 jedn. kw.; $\sqrt{709} = 26{,}6\ldots$ jedn. *Wskazówka.* Dla wyznaczenia BD prowadzimy $BE \perp AC$, $DF \perp AC$ i $DG \parallel AC$ do przecięcia z przedłużeniem BE. **617**. 1) 18 cm; 2) 25 cm; 3) 8 jedn. i 10 jedn. **618**. 1) Stosunek $= \frac{a + b}{2z}$; $z = \frac{a + b}{4}$; 2) 2 : 3. **619**. 1) 24 dm kw.; 2) pole $q = p \cdot \sqrt{c^2 - z^2}$, gdzie z jest połową różnicy podstaw. Gdy z maleje, q wzrasta i naodwrót; największe $q = pc$, gdy $z = o$, t. j. gdy trapez stanie się prostokątem, nie zmieniając obwodu; 3) obwód

$2p=2\left(\frac{Q}{h}+\sqrt{h^2+z^2}\right)$; gdy rzut z stanie się równym o, obwód osiągnie wartość najmniejszą $2p=2\left(\frac{Q}{h}+h\right)$ — wtedy trapez przekształci się w prostokąt o tem samem polu. **620**. 288 jedn. kw. **621**. $\frac{mn}{6}$. **622**. 4,8 dm kw. **623**. 540 dm kw. **624**. 1) 2,56 m kw.; 2) h^2. **625**. $\frac{c^2}{2}$. **626**. 216 jedn. kw. **627**. 83,16 dm kw. *Wskazówka*. Niech będzie $ABCD$ trapezem danym, przyczem $BC \parallel AD$. Prowadzimy $CE \parallel BD$, gdzie E jest punktem na przedłużeniu AD, i trapez zamieniamy na trójkąt ACE. **628**. $\frac{r^2}{2}$. **629**. $\frac{a^2}{2}$. **630**. Stosunek $=\frac{2bz+(a-b)z^2}{(a+b)h^2-2bhz-(a-b)z^2}$; czyniąc go równym $\frac{m}{n}$, znajdziemy: $z=\frac{h}{a-b}\left(\sqrt{\frac{a^2m-b^2n}{m+n}}-b\right)$; 1) $\sqrt{65}-3=5,06\ldots$ jedn.; 2) 3 cm. *Wskazówka*. Jeżeli $ABCD$ jest trapezem danym i EF rozważaną równoległą, to prowadzimy $BM \parallel CD$ i przyjmujemy EF za niewiadomą (przy formowaniu równań). **631**. 4 m kw. **632**. 1) $\frac{kl}{2}$; 2) $\frac{kl}{4}$. **633**. $\frac{1}{2}(a+b\sqrt{3})(b+a\sqrt{3})$. **634**. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+ab+b^2)$. **635**. 426 cm kw. *Wskazówka*. Przeprowadzić $BE\perp AD$ i $CF\perp AD$. **636**. $\frac{3r^2}{4}(\sqrt{3}+1)$. **637**. 1) 8 jedn.; 2) 16 dm. **638**. $3r^2\sqrt{3}$. **640**. 1) $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $2r^2\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. **641**. 1) $2r^2\sqrt{2}$; $3r^2$. *Wskazówka*. Łączymy środek z końcami boku i w trójkącie otrzymanym bierzemy za podstawę promień. 2) $2a^2(\sqrt{2}+1)$; $3a^2(2+\sqrt{3})$. **642**. 1) $r^2\sqrt{3}$; 2) $4r^2(2-\sqrt{2})$. Patrz wskazówkę do № 641. **643**. 1) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. **644**. $8r^2(\sqrt{2}-1)$; $12r^2(2-\sqrt{3})$. **645**. 1) $\frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; 2) $\frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **646**. 1) $\frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. *Wskazówka*. Niech AB

będzie bokiem 5-kąta i O środkiem. Najpierw obliczamy pole ABO; w tym celu za podstawę przyjmujemy OA i prowadzimy $BC\perp OA$; wtedy $OC=\frac{1}{2}a_{10}$; 2) $\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. **647**. $3r^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. Patrz wskazówkę do № 641. **650**. 1) $Q=\frac{1}{4}p^2$, $Q'=z(p-z)$; $\frac{Q}{Q'}=\frac{p^2}{4z(p-z)}$; tworzymy funkcję: $f(z)=p^2-4z(p-z)=(p-2z)^2$; oczywiście jest $f(z)\geq o$, skąd wynika, że $p^2\geq 4z(p-z)$, a więc $\frac{Q}{Q'}\geq 1$ i $Q\geq Q'$; 2) $P=4\sqrt{Q}$, $P'=2\left(z+\frac{Q}{z}\right)$; $\frac{P}{P'}=\frac{2\sqrt{Q}\cdot z}{z^2+Q}$; $f(z)=2\sqrt{Q}\cdot z-(z^2+Q)=-(z-\sqrt{Q})^2\leq o$, a więc $\frac{P}{P'}\leq 1$, $P\leq P'$.

651. 3 : 2. **652**. $2(a^2+ab+b^2)$. *Wskazówka*. Trójkąty zewnętrzne (pomiędzy kwadratami) są równoważne wewnętrznemu. **653**. 1) $P:Q=2:3$; 2) Pole $=kz(c-z)$, gdzie k jest stałą, zależną od wartości kąta niezmiennego. **654**. $ABC:DBE=1:2$. **656**. 16 razy, 25 razy. Pokazać to na rysunku. **657**. $5\sqrt{2}=7,07\ldots$ cm. **658**. $\frac{1}{4}$. **659**. Stosunek $=\frac{z^2}{h^2-z^2}$, czyniąc go równym stosunkowi $\frac{m}{n}$, znajdziemy $z=h\cdot\sqrt{\frac{m}{m+n}}$; przy $z=\frac{h}{\sqrt{2}}=0,707\ldots h$; przy $z>\frac{h}{\sqrt{2}}$; przy $z<\frac{h}{\sqrt{2}}$. **660**. 1) 4 : 21 : 56. 2) Zakładając, że stosunek części boku jest $m:n:p$, znajdziemy stosunek pól: $m^2:(n+2m):p[p+2(n+m)]$. **661**. 256 cm kw. **662**. 3 : 5 : 7. **663**. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$. **664**. 32; 72; 128 dm kw. **665**. 1) 4 : 5; 2) $a:b$. **666**. 1) $\frac{Q}{Q'}=\frac{2a^2}{z\sqrt{4a^2-z^2}}$; $\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2=\frac{4a^4}{z^2(4a^2-z^2)}$, $f(z)=4a^4-4a^2z^2+z^4=(2a^2-z^2)^2\geq o$, co oznacza, że $\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2\geq 1$; że zaś $\frac{Q}{Q'}$ jest dodatnie, więc jest również $\frac{Q}{Q'}\geq 1$, czyli $Q\geq Q'$; 2) $\frac{P}{P'}=2\sqrt{\frac{Qz^2}{4Q^2+z^2}}$; podnosimy do kwadratu i znajdujemy $f(z)=4Qz^2-4Q^2-z^4=-(z^2-2Q)^2\leq o$, a przeto jest $\frac{P}{P'}\leq 1$ i $P\leq P'$. **668**. $1:\sqrt{2}$.

669. Nie; 2 : 3. **671**. $\sqrt{200} = 14,14\ldots$ cm. **672**. 300 cm kw. **673**. $m^2 : 2mn : n^2$. **674**. 25 cm kw. **675**. 60 cm kw. i 40 cm kw. **676**. 1) 1 : 3; 2) Stosunek $\frac{2(2-z^2)}{z^2} = \frac{4}{z^2} - 2$; z zmieniać można w granicach: $o < z < \sqrt{2} = 1,414\ldots$ Gdy $z = 1$, jest pierwsze pole 2 razy większe od drugiego; gdy $z = \frac{2}{\sqrt{3}}$, pola są równe. Przy wzrastaniu z stosunek pól maleje i naodwrót; gdy więc z zmienia się w granicach $\frac{2}{\sqrt{3}} < z < \sqrt{2}$, pierwsze pole jest mniejsze od drugiego, jest zaś naodwrót, gdy z zmienia się w granicach: $o < z < \frac{2}{\sqrt{3}}$. **677**. $\frac{n-1}{n} Q$. Gdy $n \to \infty$, $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$, suma prostokątów dąży do tego, by stać się równą polu trójkąta. *Wskazówka*. $x = Q - q \cdot n$, gdzie q oznacza pole trójkąta, odciętego przez górną równoległą. **678**. 4 : 3. Pokazać to na rysunku. **679**. 2) Stosunek pól $= \frac{z}{2(z^2+1)}$; ma być zawsze $z > 1$ i stosunek < 1; gdy $z = 1$, stosunek $= \frac{1}{4}$; (największy) stosunek $= \frac{1}{3}$, gdy $z = 2$; $FD = \frac{1}{z} AD$.

680. 15 cm. **681**. 0,18. **682**. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$. **683**. $\sqrt{a(a-b)}$. **684**. $\frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}$. **685**. *Wskazówka*. Niech Q i q będą polami trójkąta danego i odciętego przez równoległą. Wtedy $q : Q = \left[\frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 : h^2$; skąd $q = \frac{Q}{2}(3 - \sqrt{5})$; a to jest wartość części mniejszej przy podziale w stosunku średnim i skrajnym (patrz № 498). **686**. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. *Wskazówka*. Niech będzie EF dzielącą równoległą. Przedłużywszy ramiona AB i CD do przecięcia w punkcie M, otrzymamy: $MEF = \frac{1}{2}(MBC + MAD)$, a stąd znajdujemy: $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$. **687**. 2) $\frac{abh}{a+b}$. **688**. 2) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$. *Wskazówka*. Można przypuścić: pole $AOD = a^2 \cdot x$ i pole $BOC = b^2 \cdot x$; wtedy pole $AOB = ab \cdot x$. **689**. *Wskazówka*. Niech będzie AB bokiem foremnego n-kąta wpisanego. Przeprowadziwszy apotemę OC, przedłużamy ją do przecięcia w punkcie D z okręgiem i w punkcie E ze styczną, wyprowadzoną z A; łączymy A z D i z środkiem O. Wtedy zagadnienie będzie sprowadzone do porównania pól tr-ów AOC, OAD i OAE, mających wysokość wspólną; lecz $OD (= OA)$ jest średnią proporcjonalną pomiędzy OE i OC. **691**. 1) 12 cm; 2) $m_a = \sqrt{11,5}$; $m_b = \sqrt{7,75}$; $m_c = \sqrt{2,5}\ldots$ **692**. 15 cm i 25 cm. **693**. $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{5}}$. **694**. 1) $\frac{a-b}{2}$; 2) 6 cm. **695**. 1) $l_a = 6$; 2) $l_a = 10$; 3) $l_a = 24$. *Wskazówka*. Wygodnie jest zastosować (tutaj i dalej) następujące twierdzenie: *kwadrat dwusiecznej równa się różnicy pomiędzy iloczynem boków, zawierających kąt podzielony, a iloczynem odcinków boku trzeciego* ($l^2_a = b \cdot c - b_1 \cdot c_1$). **696**. $b_1 = 12$; $c_1 = 27$. Patrz wskazówkę do № 695. **698**. $a = \sqrt{b(b+c)}$. *Wskazówka*. Przeprowadzić dwusieczną kąta A. **699**. $\frac{a}{2} \cdot \frac{a^2+4h^2}{a^2-4h^2} = 85$ m; h zmienia się w granicach $o < h \leq \frac{a}{2}$, zawsze jest styczna $> \frac{a}{2}$; gdy h rośnie do $\frac{a}{2}$, styczna też wzrasta i dąży do ∞ (co to znaczy?). Gdy h dąży do o, styczna dąży do $\frac{a}{2}$, przybliża się do cięciwy i obie zbliżają się nieograniczenie do okręgu. (Co w czasie tych zmian dzieje się z promieniem okręgu?). **700**. $a \cdot \frac{a^2+r^2}{a^2-r^2} = 15$ jedn. **701**. 2) 29 cm i 12 cm. **702**. 1) Zewnątrz trójkąta; 2) wewnątrz trójkąta; 3) na boku trójkąta. **703**. 1) $R = 8,125$; $r = 4$; 2) $R = 8,125$; $r = 1,5$; 3) $R = 24\frac{1}{6}$; $r = 2\frac{1}{3}$; 4) $R = \frac{35}{\sqrt{96}} = 3,5\ldots$; $r = \frac{\sqrt{6}}{2} = 1,2\ldots$ **704**. 1) $\frac{c \cdot \sqrt{c^2+ab}}{\sqrt{4c^2-(a-b)^2}}$ *Wskazówka*. Znajdujemy przekątną (zapomocą twierdzenia Ptolemeusza) i posiłkujemy się trójkątem (iloczyn dwóch jego boków dzielimy przez podwójną wysokość, przeprowadzoną do boku trzeciego); 2) rzut ramienia $\frac{b-a}{2} = z$, więc promień $= \frac{c\sqrt{c^2+ab}}{2\sqrt{c^2-z^2}}$; gdy rzut maleje, promień także maleje; gdy rzut dąży do o, promień dąży do wartości $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2}$ (gdyż wtedy

b dąży do tego, by stać się równem a). Gdy rzut rośnie, rośnie i promień, dążąc do nieskończoności (jak to rozumieć?), b dąży do $a + 2c$; zatem z może się zmieniać w granicach $o < z < c$. **705**. $2R \cdot c = a \cdot \sqrt{4R^2 - b^2} \pm b \cdot \sqrt{4R^2 - a^2}$; $c_1 = 21$; $c_2 = 9$. *Wskazówka.* Zastosować twierdzenie Ptolemeusza, poprowadziwszy średnicę CD i cięciwy DA i DB (przytem można przypuścić, że a i b znajdują się z różnych stron środka lub z jednej). **706**. 32 cm, 48 cm i 64 cm. **707**. *Wskazówka.* Jeżeli m i n są odcinkami przeciwprostokątnej, to $(m + n)^2 = (m + r)^2 + (n + r)^2$. **708**. *Wskazówka.* Zużytkować wyrażenie dla pola trójkąta (S) w zależności od trzech jego boków. **709**. 4 : 5. **710**. 4 cm. *Wskazówka.* Środki kół: wpisanego w trójkąt ABC i wpisanego w trójkąt DEF, przystają do siebie. **711**. $c = 11$; $R = 15{,}625$; $r = 4$. *Wskazówka.* Zużytkować dwusieczną kąta B. **712**. 1) 62,8 cm; 2) 94,2 m; 3) 219,8 jedn. **713**. 1) 16 cm; 2) 4 cm; 3) 0,76 jedn. **714**. 1) $\frac{\pi r}{4}$; 2) $\frac{49\pi r}{360}$; 3) $\frac{119\pi r}{14400}$. **715**. 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$; 3) $\frac{2160l}{15121\pi}$. **716**. 1) $\frac{810}{\pi}$; 2) $\frac{72}{\pi}$. **717**. $57^0 17'$. **718**. 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$. **719**. 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{2l\sqrt{3}}{2\pi}$. **720**. 25 cm. **721**. $2\pi m$. **722**. 8 cm. **723**. 157 cm. **724**. $\frac{3}{4}l$. **729**. $\frac{1}{2}C = 3{,}141\ldots r$; $a_3 + a_4 = 3{,}146\ldots r$. **730**. Obwód otrzymany $= 3{,}141640\ldots$ średnicy, a okrąg $= 3{,}141592\ldots$ średnicy. **731**. 1) 314 cm kw.; 2) 50,24 m kw.; 3) 19,625 jedn. kw. **732**. 1) 0,8 dm; 2) 4 m; 3) $\sqrt{0{,}32 \cdot 17} = 2{,}3\ldots$ dm. **733**. 1) 5,12 jedn. kw.; 2) 15,072 cm; 3) $\frac{4}{\pi} > 1$; 4) $\sqrt{\frac{\pi}{4}} < 1$. **734**. $\frac{\pi F}{2}$. **735**. 15,7 m kw. **736**. 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **737**. $\frac{2}{\pi}$ i $\frac{3}{\pi}$ (w przybliżeniu $\frac{7}{11}$ i $\frac{21}{22}$). **738**. 1 : 2. **739**. 1) 47,1 cm kw.; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$; 3) πa^2. **741**. 1) $\frac{3}{16}\pi r^2$; 2) $\frac{7}{160}\pi r^2$; 3) $\frac{18001}{32400}\pi r^2$. **742**. 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$; 3) $\sqrt{\frac{259209q}{49\pi}}$. **743**. $360^0 \cdot \frac{q}{\pi r^2}$. **744**. 229^0. **745**. 1) $\frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$; 2) $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$; 3) $\frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$; 4) $\frac{r^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2})$; 5) $\frac{r^2}{12}(\pi - 3)$; 6) $\frac{r^2}{40}(4\pi - 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$. **746**. 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$; 3) $\frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$; 4) $\frac{a^2}{16}(2 +$

$+ \sqrt{2})(\pi - 2\sqrt{2})$; 5) $\frac{a^2}{12}(2 + \sqrt{3})(\pi - 3)$; 6) $\frac{a^2}{80}(3 + \sqrt{5})(4\pi - 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$. **747**. 1) $\frac{r^2}{8}(3\pi - 2\sqrt{2})$; 2) $\frac{r^2}{12}(5\pi - 3)$; 3) $\frac{r^2}{40}(18\pi - 5\sqrt{5} + 5)$. **748**. 1) $\frac{\pi r^2}{6}$; 2) $\frac{Qn}{360}$. **749**. 1) $\frac{\pi r^2}{6}$; 2) $\frac{r^2}{12}(2\pi + 3)$. **750**. $\frac{a^2}{24} \cdot (7\pi - 6 - 6\sqrt{3})$ albo $\frac{a^2}{24}(13\pi + 6 - 6\sqrt{3})$.

751. 1) $\frac{4Q \cdot mn}{\pi(m^2+n^2)}$; 2) Połóżmy $\frac{mn}{m^2 + n^2} = t$ i, uważając czasowo t za niezmienne, znajdziemy $\frac{m}{n} = \frac{1}{2t}(1 \pm \sqrt{1 - 4t^2})$; ponieważ jednak musi być $1 - 4t^2 \geq o$, więc największa wartość $2t = 1$. Wobec tego największe pole $= \frac{4Q}{\pi} \cdot t = \frac{4Q}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2Q}{\pi}$; wtedy oczywiście $\frac{m}{n} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$; 3) Obwód $= 4\sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot \frac{m + n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; kładąc i tu $\frac{m + n}{\sqrt{m^2 + n^2}} = t$, znajdziemy $\frac{m}{n} = \frac{1}{t^2 - 1}(1 \pm \sqrt{1 - (t^2 - 1)^2})$, skąd największe $t = \sqrt{2}$; zatem największy obwód $= 4\sqrt{\frac{2Q}{\pi}}$ — wtedy zaś $\frac{m}{n} = \frac{1}{t^2 - 1} = 1 : (2 - 1) = 1$. **752**. $\frac{r}{2}(\sqrt{4 + \pi} + \sqrt{4 - \pi})$ i $\frac{r}{2}(\sqrt{4 + \pi} - \sqrt{4 - \pi})$. **753**. $\frac{8Q}{\pi}$. **754**. $\frac{\pi Q}{\sqrt{3}}$ **755**. 1 : 2. **756**. 1) $\frac{r^2}{6}(4 - \pi)$; 2) $\frac{r^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$; 3) $\frac{r^2}{6}(2\sqrt{3} - \pi)$. **757**. $\frac{a^2}{24}(\pi + 6)$. **758**. $\frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$. **759**. 1) $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$; 2) $\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) - \frac{ab}{2}$. **760**. 1) $\frac{Q}{Q'} = \frac{2r^2}{z\sqrt{4r^2 - z^2}}$; $Q \geq Q'$; 2) $\frac{P}{P'} = \frac{r\sqrt{8}}{z + \sqrt{4r^2 - z^2}}$; $f(z) = r\sqrt{8} - z - \sqrt{4r^2 - z^2}$. Kładąc $f(z) = t$ i uważając t za stałe, wyznaczymy $z = \frac{1}{2}\left[r\sqrt{8} - t \pm \sqrt{t(2r\sqrt{8} - t)}\right]$; musi jednak być $t(2r\sqrt{8} - t) \geq o$, skąd widać, że t nie może być ujemne; jest więc w każdym razie $f(z) = r\sqrt{8} - z - \sqrt{4r^2 - z^2} \geq o$, a zatem $\frac{P}{P'} \geq 1$

i $P \geq P'$. **761.** $\frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$. **762.** $\frac{a^2}{18}(\pi - 3)$. **763.** $\frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3})$. **764.** *Wskazówka.* Obliczyć pole koła wewnętrznego, zastosowawszy odpowiedzi z № 498. **770.** 1) 68 cm; 2) $b \cdot \frac{ma^2 + n(a^2+b^2)}{(m+n)(a^2+b^2)}$. **771.** 4 m. **772.** $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. **773.** 1) 1764 jedn. kw.; 2) $\left[1 - \left(\frac{m}{m+n}\right)^2\right]$. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; z równania $1 - \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 = \frac{1}{2}$ otrzymamy $\frac{m}{n} = \sqrt{2} + 1$. **774.** $\frac{R^2}{4}(3+\sqrt{3})$. **775.** 40 i 42. **777.** 1) r^2; 2) $r^2\sqrt{2}$; 3) $r^2\sqrt{3}$. **778.** $\frac{3}{5}$ średnicy. **779.** $\frac{Q}{12}(7\pi + 3)$. **780.** 3 : 5. **781.** 1344 cm kw. i 756 cm kw. **782.** 1) $\frac{R}{3}$; 2) $R(\sqrt{2} - 1)$; 3) $R(2\sqrt{3} - 3)$. **783.** 1) 1 : 2; 2) 3 : 4. **784.** 625π jednostek kw. **785.** $\frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$; $\frac{a}{3} \cdot (3 - \sqrt{3})$. **786.** Boki: 5 cm i 10 cm; przekątne $\sqrt{97}$ cm i $\sqrt{153}$ cm. **787.** 1) $\frac{c}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \frac{c}{4}(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$; $\frac{c}{4}$; 2) $\frac{c}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\frac{c\sqrt{2}}{4}$; 3) 48 cm i 14 cm. **788.** 1) $Q - Q' = r^2 - z(2r - z) = (r-z)^2 \geq o$; 2) $P - P' = 4\sqrt{Q} - 2\left(z + \frac{Q}{z}\right) = -\frac{2}{z}(z - \sqrt{Q})^2$; ponieważ jest $z > o$, jest oczywiście $P - P' \leq o$, $P \leq P'$. **790.** $a_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)$. *Wskazówka.* Zważywszy, że $\frac{360^0}{15} = 24^0 = 60^0 - 36^0$, bierzemy łuki kolejne $AB = 24^0$ i $BC = 36^0$, przeprowadzamy średnicę CD i cięciwy: AB, BC, AC, AD i BD i zastosowujemy twierdzenie Ptolemeusza. **791.** 4. **792.** $\frac{r^2}{4}(3 - \sqrt{3})$. **794.** $15\frac{15}{16}$ cm. *Wzkazówka.* Obliczywszy z początku przekątną trapezu, zastosowujemy następnie wzór: $R = bc : 2h_a$. **797.** $\sqrt{\frac{na^2+mb^2}{m+n}}$. *Wskazówka.* Przedłużyć ramiona

trapezu do wzajemnego przecięcia i skorzystać ze stosunku pól trójkątów podobnych. **798.** $\frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1)$. **799.** $\frac{8\pi r}{3}$; $2\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$. **800.** $S = 2016\sqrt{3}$; $BD = 112$; ($\angle BAC = 60^0$; $\angle CAD = 60^0$). *Wskazówka.* Patrz № 616. **801.** $CM = 18$; $DM = 15$. *Wskazówka.* Z początku wyznaczyć stosunek $MC : MD$, przeprowadzając AD i BC. **802.** $AB = \frac{a}{2}\sqrt{6}$; $AC = \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$. **803.** *Wskazówka.* Końce ramienia i punkt jego styczności połączyć ze środkiem. **804.** $\pi r^2 \cdot \frac{90 - n}{180}$. **805.** Średni $= a(2 - \sqrt{3})$; boczny $= \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$. **806.** $\frac{5}{4}r$. *Wskazówka.* $MD = CD$. **807.** $x = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{n-2}}$; w przykładzie $x = \frac{R}{2}; \frac{R}{3}; \frac{R}{4}$. **808.** *Wskazówka.* *1-szy sposób.* Niech będzie $ABCD$ rombem i $\angle BAD = 30^0$. Kreślimy $\angle ABE = 15^0$, przyczem E — punkt na przekątnej AC; wtedy $BE = BD$ i trójkąt $ABE \backsim ABC$. *2-gi sposób.* Sprawdzamy równość $AB^2 = BD \cdot AC$, wyrażając BD i AC przez AB (podług wzorów dla wielokątów foremnych). **809.** $2n(m - n) : m^2$; przyczem m^2 odpowiada trójkątowi. **810.** 3. *Wskazówka.* Przeprowadzić wysokość trójkąta danego. **811.** $\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$; drugie, bo znaleziony stosunek jest zawsze mniejszy od 1. *Wskazówka.* Pola rombów można porównać zapomocą kwadratów ich wysokości. **812.** Pole AMB = polu $CMD = \frac{r^2}{12}(2\pi - \sqrt{3})$; pole $BMC = \frac{r^2}{6}(\pi - \sqrt{3})$; pole $AMD = \frac{r^2}{6}(3 + 2\sqrt{3})$. **813.** $ab \cdot \frac{2mn}{(m+n)^2}$. *Wskazówka.* Z początku zwracamy uwagę na to, że wierzchołki równoległoboku dzielą boki prostokąta w stosunku $m : n$. **814.** $\frac{a+b}{4(a-b)} \cdot \sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(c+d-a+b)}$. *Wskazówka.* Z końca podstawy górnej prowadzimy równoległą do ramienia i obliczamy pole otrzymanego trójkąta zapomocą boków wiadomych. **815.** 108^0. **816.** $\frac{lm}{l+m}$. **817.** $\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$. **818.** 8. **819.** 2 dm kw. **820.** 1) $\frac{ab}{a+b}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$. *Wskazówka.* Równolegle

do dwusiecznej poszukiwanej CD przeprowadzamy linję BE, gdzie E jest punktem na przedłużeniu AC. **821**. $\frac{2ab}{a+b}$. *Wskazówka.* Punkt przecięcia przekątnych dzieli poszukiwaną prostą na połowy. **822**. $\frac{(a+b)^2 \cdot h}{2(a+3b)(b+3a)}$. **823**. $c=7$. *Wskazówka.* Oddzielamy $\angle BAD = ABC$. **824**. 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{(a-b)^2}{4}$. **825**. 21. *Wskazówka.* Znaleźć ramiona trójkątów danych i zastosować twierdzenie Ptolemeusza. **826**. $\sqrt{b^2+c^2+bc}$ albo $\sqrt{b^2+c^2-bc}$. **827**. $S=$

$$=1:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}.$$

Wskazówka. Zastosować równości: $a=\frac{2S}{h_a}$, $b=\frac{2S}{h_b}$, $c=\frac{2S}{h_c}$.

828. $S=\frac{1}{3}\sqrt{q(q-l)(q-m)(q-n)}$, gdzie $q=\frac{l+m+n}{2}$. *Wskazówka.* Niech będzie ABC trójkątem danym i $AD=l$, $BE=m$ i $CF=n$. Przedłużamy w obie strony bok AC i prowadzimy $BG \parallel DA$ i $BH \parallel FC$; wtedy $AG=AC$ i $CH=AC$, a więc pole $ABC=\frac{1}{3}$ pola GBH. Dla obliczenia pola GBH mamy: $BG=2l$, $BH=2n$, oraz BE, równa m, służy za środkową; obróciwszy trójkąt EBG dokoła E na dół, tak aby EG przystawało do EH, zamieniamy trójkąt GBH na trójkąt o bokach $2l$, $2m$ i $2n$. **829**. 10,08 dm kw. **830**. $BM=500$. **831**. $CD^2+CE^2=2r^2$. *Wskazówka.* Przeprowadziwszy cięciwę $DF \perp AB$, należy połączyć F z C i z E i rozpatrzyć łuki. **832**. $\frac{t(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-t^2(a+b)^2}$. *Wskazówka.* Niech $CB=a$, $CA=b$, $CD=t$. Prowadzimy $AE \parallel CD$, gdzie E jest punktem na przedłużeniu BC; wtedy $CE=b$, $AE=\frac{t(a+b)}{a}$ i $\frac{\text{pole } ABC}{\text{pole } ACE}=\frac{a}{b}$.

833. *Wskazówka.* Aby porównać stosunki boków odpowiednich, *obliczamy* te stosunki zapomocą podstaw a i b. **834**. $BD=34$; $AC=38$. **835**. $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, gdzie $p=\frac{a+b+c+d}{2}$. *Wskazówka.* Dwa boki przeciwległe przedłużamy do przecięcia wzajemnego i korzystamy z podobieństwa trójkątów (patrz № 321); otrzymane przy obliczeniu pola trójkąta ułamki skomplikowane skracają się przez $d+b$ lub $d-b$. **836**. $BC=\frac{r}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

Wskazówka. Ze środka O prowadzimy $OE \perp BC$ i odnajdujemy oddzielnie BE i CE. **837**. $AD=4$ cm lub $12\frac{1}{2}$ cm. [Warunek możliwości zadania: $(b+2q)^2 \geq 8c^2$, gdzie q oznacza rzut c na b]. **838**. $\frac{CM}{DM}=\frac{a-b}{a+b}$. **839**. $2\sqrt{\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)}$. *Wskazówka.* Niech będą: C — wierzchołek kąta, M — punkt dany, MA i MB — jego odległości od boków kąta. Na 4-kącie $AMBC$ opiszemy okrąg i zwrócimy uwagę na cięciwę AB i trójkąt AMB. **840**. $\frac{f(g+k)^3}{4gk}$.

841. $x_1=y_2=\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-2ab})$; $x_2=y_1=\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-2ab})$. W przykładach: 1) $x=3$; $y=10$; 2) $x=y=6$. **842**. *Wskazówka.* *1-szy sposób.* Najpierw wyznaczyć CD^2 i CE^2 z trójkątów COD i COE. *2-gi sposób.* Przewrócić trójkąty COD i COE tak, aby OD i OE się zeszły. **843**. $S=210$; $R=22{,}1$; $r=5$; $r_a=70$; $r_b=8{,}4$; $r_c=15$. **844**. 1) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$; 10, $\sqrt{117}$, $\sqrt{325}$; 2) $23\frac{1}{3}$. *Wskazówka.* Zastosować wzory: $\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}$ i $S=\sqrt{r\cdot\rho_1\rho_2\rho_3}$. **845**. 1) $\frac{Q}{Q'}=\frac{n^2}{4m(n-m)}=\frac{1}{4z(1-z)}$, gdzie $z=\frac{m}{n}$; $\frac{Q}{Q'}\geq 1$. Albo też $Q-Q'=\frac{ab}{4}[1-4z(1-z)]=\frac{ab}{4}(1-2z)^2 \geq o$, więc $Q \geq Q'$; 2) $P-P'=(a+b)-2[az+b(1-z)]=(a-b)(1-2z)$. *Dyskusja.* 1) Gdy $a=b$, jest $P=P'$; 2) gdy $a>b$, to przy $z<\frac{1}{2}$ jest $P>P'$, a przy $z>\frac{1}{2}$ jest $P<P'$; 3) gdy $a<b$, to przy $z<\frac{1}{2}$ jest $P<P'$, zaś przy $z>\frac{1}{2}$ jest $P>P'$. **846**. $\sqrt{88}=9{,}38\ldots$ m. **847**. $\sqrt{M^2+N^2}$. **848**. 1) $\frac{2r^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$; 2) 1 : 3. **849**. 68 cm. **850**. *Wskazówka.* 1) Dowieść zapomocą obliczania. 2) Dowieść zapomocą porównania proporcyj. **851**. 1) Oznaczywszy jedną z liczb przez $a+x$, a drugą przez $a-x$, znajdziemy ich iloczyn: $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$, który posiada wartość największą przy $x=0$; 2) oznaczywszy jedną z liczb przez $c+x$, a drugą przez $\frac{c^2}{c+x}$, znajdziemy ich sumę: $c+x+\frac{c^2}{c+x}=2c+\frac{x^2}{c+x}$, która otrzymuje wartość najmniejszą przy $x=0$. **852**. 1) Środek cięciwy; 2) najkrótsza jest cięciwa, której środkiem jest punkt dany. **853**. 1) Pole kwadratu; 2) kwadrat. **854**. 1) Promień $=\frac{p}{2}$, pole największe $=\frac{p^2}{4}$; 2) promień $=\sqrt{Q}$, obwód naj-

mniejszy $= 4\sqrt{Q}$. **856**. 1) Równoboczny; 2) równoboczny. **857**. 1) Największym jest trójkąt równoramienny; 2) jego pole $=$ a) $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$; b) $\frac{c^2}{2}$; c) $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$. **858**. Wysokość prostokąta największego jest $\frac{h}{2}$, jego pole $=\frac{ah}{2}$. *Wskazówka*. Oznaczywszy wysokość prostokąta przez y, a podstawę przez x, znajdziemy: $x : 2a = (h - y) : h$ oraz $P = xy = \frac{2a}{h}(h-y) \cdot y$. Czynniki zmienne y i $h-y$ posiadają sumę stałą — h, tak iż P otrzyma wartość największą, gdy będzie $y = h - y$. **859**. Największym będzie trójkąt prostokątny, jego pole $=\frac{r^2}{2}$. *Wskazówka*. Oznaczywszy podstawę trójkąta przez $2x$ i wysokość przez y, znajdziemy: $x^2+y^2=r^2$ oraz $F = xy$, lub $P^2 = (x^2)\cdot(y^2)$. Ponieważ suma czynników x^2 i y^2 jest stała, to iloczyn P^2, a więc i pole F, jest największe, gdy $x^2=y^2$. **860**. 1) kwadrat; 2) kwadrat. **861**. 1) Równoramienny, wysokość $=\sqrt{b^2-a^2}$. *Wskazówka*. Oznaczywszy wysokość przez z, rzut jednego z boków przez x i rzut drugiego przez $2a - x = y$, otrzymamy $\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{z^2+y^2}=2b$, skąd znajdziemy: $z = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cdot\sqrt{(a+b-y)(b-a+y)}$. Suma czynników pod pierwiastkiem jest stała, a przeto z będzie największe, gdy będzie $a+b-y=b-a+y$. 2) Równoramienny — co wynika z poprzedniego. *Uwaga*. Do tego samego wniosku dojdziemy niezależnie, stosując wzór Herona; wówczas wynik zadania 1-go będzie wnioskiem z drugiego. **862**. Najmniejszy jest trójkąt, którego boki są dwa razy dłuższe od boków równoległoboku; jego pole $=2bc$. *Wskazówka*. Oznaczywszy: $BF = x$ i $DE = y$, znajdziemy z odpowiedniej proporcji $xy = ab$. Oznaczmy pole $\triangle ABD$ przez s i pole $\triangle AFE$ przez S; znajdziemy: $s : S = ab : (a+x)(b+y)$, skąd $S = \frac{c}{2a}(a+x)(b+y) = \frac{c}{2a}(2ab+ay+bx)$. Ale iloczyn $ay\cdot bx = a^2b^2$ jest stały, więc suma czynników ay i bx będzie najmniejsza, gdy będzie $ay = bx = ab$, skąd $y=b$, $x=a$. **863**. Gdy $AD = AE = \sqrt{\frac{bc}{n}}$. *Wskazówka*. Oznaczywszy $AD = x$ i $AE = y$, znajdziemy $xy = \frac{bc}{n}$; spu-

ściwszy prostopadłą DF na bok AB, otrzymamy wkońcu: $DE^2 = x^2+y^2-\frac{2b}{n}\sqrt{c^2-h^2}$ i t. d. **864**. Trapez szukany jest połową sześciokąta foremnego. *Wskazówka*. Podstawa dolna trapezu $=2r$, górna $=2x$, każde z ramion $=y$. Połowa obwodu $p = r+x+y$; prócz tego jest $y^2 = 2r(r-x)$. Rugując x z obu równań, otrzymamy: $y^2 - 2ry + 2rp - 4r^2 = 0$, skąd $y = r \pm \sqrt{r(5r-2p)}$. Ponieważ y powinno być rzeczywiste, więc wartość największa, jaką może otrzymać obwód $2p$, jest $2p = 5r$, przytem $y = r$ i $2x = r$. **865**. 1) Szukany trójkąt jest równoramienny (połowa kwadratu wpisanego). 2) Trójkąt równoramienny. *Wskazówka*. Oznaczywszy przez x i y przyprostokątne, otrzymamy: $2p = x+y+2r$, $x^2+y^2=4r^2$ i po wyrugowaniu y-ka: $x^2 - 2(p-r)x + 2p(p-2r) = 0$, skąd

$$x = p - r \pm \sqrt{r^2+2pr-p^2} = p - r \pm \sqrt{(r+r\sqrt{2}-p)(p-r+r\sqrt{2})}.$$

Ponieważ x powinno być rzeczywiste i $p > 0$, przeto największa wartość połowy obwodu $p = r + r\sqrt{2}$; wtedy $x = r\sqrt{2} = y$. *Uwaga*. Inny sposób rozwiązania: z równań poprzednich otrzymamy: $2p^2 - 4pr - xy = 0$, skąd $p = r + \sqrt{r^2+\frac{xy}{2}}$; p będzie największe, gdy pole $\frac{xy}{2}$ będzie największe, a to ma miejsce, gdy $x = y$. **866**. Punkt szukany jest środkiem rzutu odcinka, łączącego punkty dane, na prostą daną. **867**. $y = \frac{1}{2}(b+\sqrt{c^2-a^2})$, $x = \frac{a}{2}\left(1+\frac{b}{\sqrt{c^2-a^2}}\right)$, gdzie y oznacza odległość pionową punktu najniższego od wierzchołka słupa wyższego, a x — jego odległość poziomą od tegoż słupa. **868**. 1) Oba trójkąty równoramienne, przyczem względem 2-go koło jest wpisane, względem 1-go — zawpisane styczne do przeciwprostokątnej i przedłużeń przyprostokątnych. *Wskazówka*. Oznaczywszy przez x i y przyprostokątne, znajdziemy: $2P = xy$ oraz $x^2+y^2 = (x+y-2r)^2$, skąd po wyrugowaniu y-ka będzie $rx^2 - (r^2+P)x + 2Pr = 0$ oraz

$$x = \frac{1}{2r}\left[r^2+P+\sqrt{[P-r^2(3+\sqrt{8})][P-r^2(3-\sqrt{8})]}\right].$$

Z uwagi na to, że x powinno być rzeczywiste, najmniejsza wartość pola $P = r^2(3+\sqrt{8})$, i wtedy $x = r(2+\sqrt{2}) = y$; największa zaś wartość pola $P = r^2(3-\sqrt{8})$, i wtedy $x = r(2-\sqrt{2}) = y$. 2) Oba trójkąty rów-

noramienne. **870**. 1) $Q = 2z(1 - z)S$, gdzie S jest polem trójkąta danego. Kładąc tu $z = \frac{1}{2}$, otrzymamy dla porównania pole stałe $Q' = \frac{1}{2}S$; $\frac{Q'}{Q} = \frac{1}{4z(1-z)}$, $f(z) = 1 - 4z(1-z) = (1-2z)^2 \geq o$, a zatem pole Q może się co najwyżej równać $\frac{1}{2}S$; 2) $P = 2[c + (a - c)z]$, gdzie a i c są odpowiedniemi bokami danego trójkąta; jeśli P ma nie zależeć od z, to musi być $a - c = o$, czyli $a = c$. **871**. $\frac{Q'}{Q} = \frac{(z+1)^2}{4z}$; $P = 2l$, gdzie l jest przekątną prostokąta. **872**. $\frac{Q'}{Q} = \frac{(z+1)^2}{2(z^2+1)}$.

SPIS RZECZY.